

Г 2 н

решения  
всех геометр  
задач

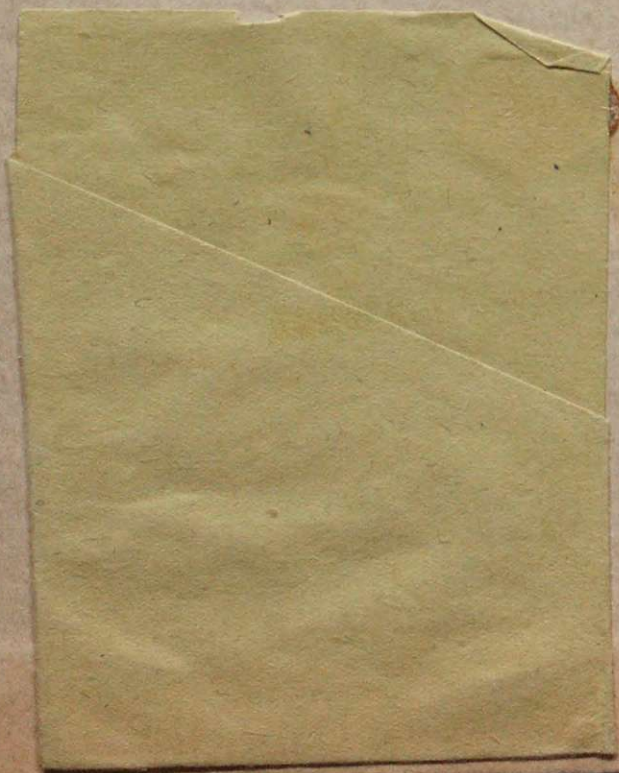
ч. 1

к. 1

1928

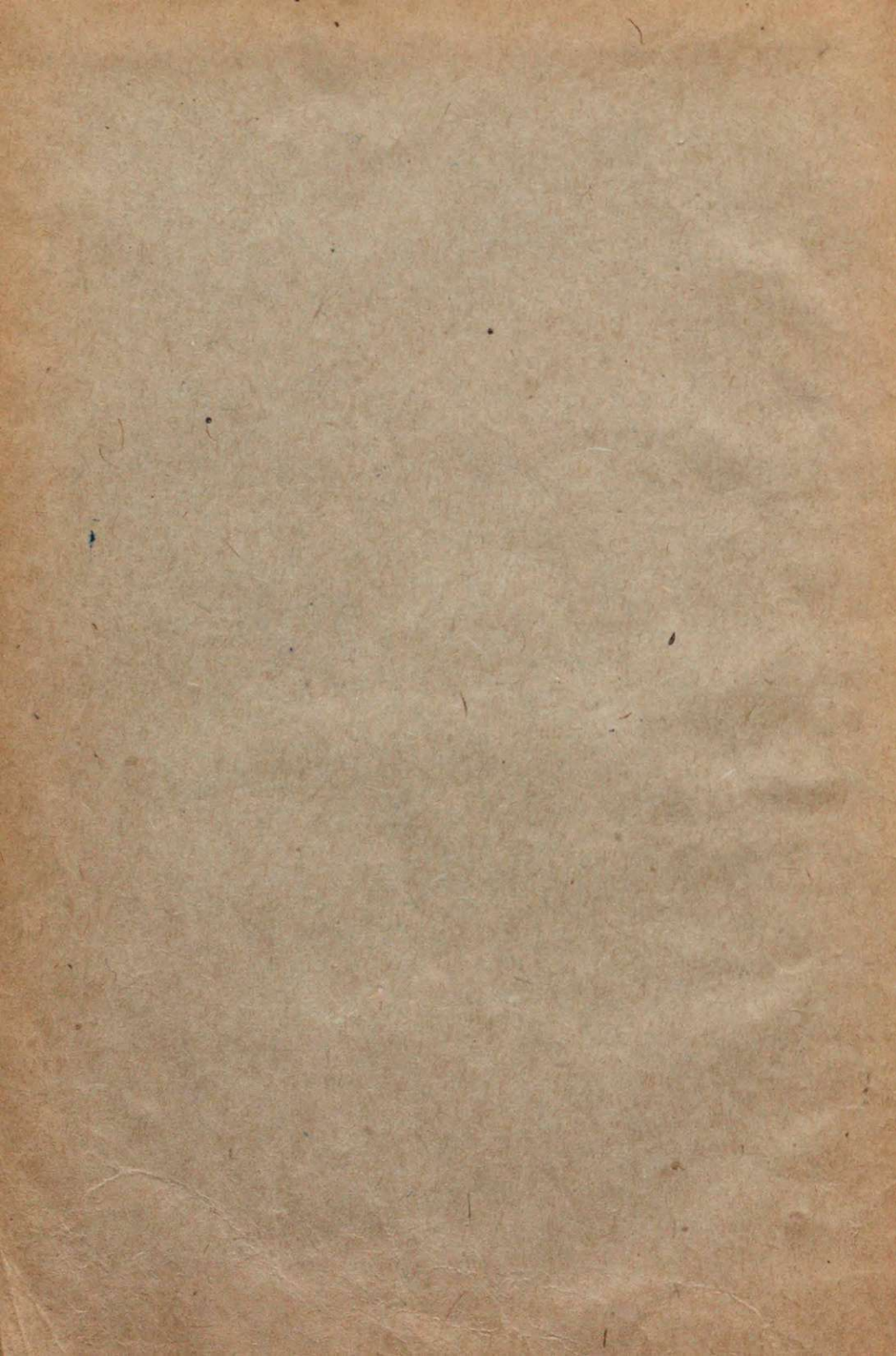
7  $\frac{40}{15}$














ДЛЯ САМООБРАЗОВАНИЯ

  
$$\begin{array}{r} 40 \\ \hline 15 \end{array}$$
  
1-64  
9 5063

# РЕШЕНИЯ

ВСЕХ

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

К СБОРНИКУ Н. РЫБКИНА

Часть I — ПЛАНИМЕТРИЯ

ВЫПУСК I (задачи 1—469)

СОСТАВИЛ К. О. ГАН

Приложение: АТЛАС ЧЕРТЕЖЕЙ



28-36445

ИЗДАНИЕ АВТОРА

КИЕВ — 1928.

...и опи... та  
...бібліотечн.  
...на цю книгу вмі-  
...в „Літоп. Укр. Друку“  
...„Картковому реперт“  
Укр. Книжк. Палати

Трест „Киев-Печать“,  
8-я типография,  
Киев, ул. Л. Толстого, 5.



2011110203



R 120  
52

## ОТ АВТОРА.

Тяга к техническому образованию создала огромные кадры учащихся из среды рабочих и крестьян. Но эта тяга к образованию встречает ряд серьезных препятствий. В глухих местечках и селах, нередко и в городах—при ограниченности возможностей у учащегося, последний попадает в тупик, при разрешении трудных по той или иной причине—задач.

Чтоб дать выход из этого положения—и рассчитано настоящее пособие.

Это особенно необходимо для готовящихся к технической деятельности. Неправильное усвоение методов решения геометрических задач скажется впоследствии, когда учащемуся в профшколе или в техническом ВУЗ'е придется производить сложные расчеты, и малейшая неправильность приводит к целому ряду лишних вычислений, а иногда является препятствием для доведения расчета до конца.

Вот на эту сторону и обращено особое внимание: из всех возможных решений дается кратчайшее, в задачах, где это нужно, даны методические указания и соответствующие объяснения, во многих решениях приводится и предварительный анализ условия.

Приведенные соображения и легли в основание при составлении этой книги.

---





# Планиметрия.

## Прямая линия.

Указание. Нумерация чертежей та же, что и задач.

1. Отрезок  $CD$  равен  $AB - AC - BD = 20 - 5,1 - 7,9 = 7$  м.

2. Решение, как в зад. № 1:

$$3 - 1,12 - 1,38 = 0,5 \text{ м.}$$

3. Т. к. не указывается места расположения точек  $C$  и  $D$  относительно  $A$  и  $B$ , то задача допускает 3 случая:

1) Точки  $C$  и  $D$  лежат между точками  $A$  и  $B$ . Отрезок  $CD = AB - AC - BD = 50 - 10 - 10 = 30$  м.

2) Одна из точек  $C$  и  $D$  лежит между точками  $A$  и  $B$ , другая — вне. Отрезок  $CD$  равен: а)  $CB + BD = (AB - AC) + BD = (50 - 10) + 10 = 50$  м; в)  $AC + AD = AC + (AB - BD) = 10 + (50 - 10) = 50$  м.

3) Точки  $C$  и  $D$  лежат вне точек  $A$  и  $B$ .

Отрезок  $CD = AB + AC + BD = 50 + 10 + 10 = 70$  м.

4.  $BD = CD - BC$  (1).

Но  $CD = AB + 21$  м (по условию).

$BC = AB - 9$  м (по чертежу).

Подставляя в (1) вместо  $CD$  и  $BC$  указанные выражения, получим:  
 $BD = AB + 21 - (AB - 9) = AB + 21 - AB + 9 = 30$  м.

5. Прямая  $AB$  делится в точке  $C$  на 2 отрезка:  $AC$  и  $BC$ .

Точка  $D$  — середина  $AC$ , точка  $E$  — середина  $BC$ .

Следовательно,  $DC = \frac{AC}{2}$ ,  $CE = \frac{BC}{2}$ .

Отсюда  $DC + CE = \frac{AC}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AC + BC}{2} = \frac{AB}{2}$ .

Но  $DC + CE = DE = 2,75$  м, значит,  $\frac{AB}{2} = 2,75$  м.

А потому  $AB = 2 \cdot 2,75 = 5,5$  м.

6. Отрезок  $BC = AB - AC = AB - \frac{14}{17} AB = \frac{3}{17} AB$ ;

$CD = 2\frac{1}{2} BC = 2\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{17} AB$ ;

$AD = AC - CD = \frac{14}{17} AB - 2\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{17} AB = \frac{13}{34} AB$ .

Но  $AD = 26$  м. Следовательно,  $\frac{13}{34} AB = 26$  м, откуда

$$AB = \frac{26 \cdot 34}{13} = 68 \text{ м.}$$

7. Отношение  $\frac{2}{3} : \frac{4}{15}$ , по упрощении, равно 5:2.

(Отношение сохранится, если дроби разделим и в полученной дроби произведем сокращение).

Точка  $C$  делит отрезок  $AB$  на 2 равные части  $AC = BC = \frac{2,8}{2} = 1,4$  м. Точка  $D$  делит  $AB$  на 2 части в отношении 5:2,

т.е.  $AD = \frac{5}{7} AB$ , а  $BD = \frac{2}{7} AB = \frac{2}{7} \cdot 2,8 = 0,8$  м.

Отрезок  $CD = BC - BD = 1,4 - 0,8 = 0,6$  м.

8. Отрезок  $AC$  содержит  $m$  отрезков, равных  $AB$ , так что  $AC = m \cdot AB$ .

Следовательно,  $BC = AC - AB = m \cdot AB - AB = (m - 1)AB$ .

$$\text{Отношение } \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{(m - 1)AB} = \frac{1}{m - 1}.$$

9. 1-й способ.

Прямая  $AB$  разделена в отношении 2:3:4, иначе говоря, она содержит  $2 + 3 + 4 = 9$  частей. Отрезок  $AC$  содержит 2 части,  $CD - 3$  части,  $DB - 4$  части. Отрезок  $AE$  равен  $\frac{1}{2}AC$  или содержит 1 часть;  $FB = \frac{1}{2}BD$  или содержит 2 части. Следовательно,  $EF = AB - AE - FB = 9 - 1 - 2 = 6$  частей.

1 часть равна  $\frac{5,4}{6} = 0,9$  м. Прямая  $AB = 0,9 \cdot 9 = 8,1$  м.

2-й способ.

$$AC = \frac{2}{2+3+4} AB = \frac{2}{9} AB; \quad DB = \frac{4}{2+3+4} AB = \frac{4}{9} AB;$$

$$AE = \frac{AC}{2} = \frac{1}{9} AB; \quad FB = \frac{DB}{2} = \frac{2}{9} AB;$$

$$\begin{aligned} EF &= AB - AE - FB = AB - \frac{1}{9} AB - \frac{2}{9} AB = \\ &= \frac{6}{9} AB \text{ или } \frac{2}{3} AB. \text{ По условию } EF = 5,4 \text{ м.} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{2}{3} AB = 5,4 \text{ м, откуда } AB = \frac{5,4 \cdot 3}{2} = 8,1 \text{ м.}$$



**10.** Точка  $C$  делит  $AB$  в отношении  $5:7$ , а потому

$$AC = \frac{5}{5+7} AB = \frac{5}{12} AB.$$

Точка  $D$  делит  $AB$  в отношении  $5:11$ , а потому

$$AD = \frac{5}{5+11} AB = \frac{5}{16} AB. \text{ Как видно из чертежа, } DC = AC - AD,$$

$$\text{т.е. } DC = \frac{5}{12} AB - \frac{5}{16} AB = \frac{5}{48} AB.$$

$$\text{А потому } \frac{5}{48} AB = 10 \text{ м. Отсюда } AB = \frac{10 \cdot 48}{5} = 96 \text{ м.}$$

**11.** 1) Как видно из чертежа,  $BC = AB - AC$  или  $BC = 20 - 13 = 7 \text{ м.}$  Точки лежат на одной прямой.

2) Из чертежа видно, что  $BC = AC - AB$  или  $BC = 7 - 4 = 3 \text{ м.}$  Точки лежат на одной прямой.

3) Из чертежа видно, что  $BC = AB - AC$  или  $BC = 1,8 - 1,3 = 0,5 \text{ м.}$  Этот результат не соответствует условию:  $BC = 3 \text{ м.}$  Точки не лежат на одной прямой.

**12.** Возьмем одну какую-либо точку и соединим ее последовательно с остальными  $(n-1)$  точками; получим  $(n-1)$  прямых. Но всех точек —  $n$ . Следовательно, линий получится как-будто  $(n-1)n$ . Принимаем во внимание, что каждая пара точек дает только одну линию: напр., когда точку  $A$  соединим с остальными точками, получаем линии  $AB, AC, AD, \dots$ , а соединяя  $B$  с остальными точками, получим  $BA, BC, BD, \dots$ . Следовательно, в первом случае имеем прямую  $AB$ , а во втором опять ту же прямую  $BA$ . Значит, фактически число всех линий будет не  $(n-1)n$ , а вдвое меньше:

$$\frac{(n-1)n}{2}.$$

Подставляя в эту формулу последовательно 5, 6 и 20, получим:

$$1) \frac{(5-1)5}{2} = 10; 2) \frac{(6-1)6}{2} = 15; 3) \frac{(20-1)20}{2} = 190.$$

**13.** Пусть будет  $n$  прямых:  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ .

Прямая  $a_1$  пересекает остальные  $(n-1)$  прямую в  $(n-1)$  точках. Следовательно, каждая из остальных прямых тоже даст  $(n-1)$  точку пересечения, и всех точек должно бы оказаться

$(n-1)n$ . Но каждая пара прямых пересекается только один раз, а в расчет числа  $(n-1)n$  входит 2 раза. Как и в предыдущей задаче, находим, что всех точек пересечения будет  $\frac{(n-1)n}{2}$ .

### У Г Л Ы.

**14.**  $\angle AOD = \angle AOC - \angle DOC$ ; но  $\angle AOC$  прямой ( $OC$  перпендикулярна к  $OA$ ),  $\angle COD = \frac{4}{7}d$ . Следовательно,  $\angle AOD = d - \frac{4}{7}d = \frac{3}{7}d$ , а весь угол  $AOB$  равен сумме углов  $BOD$  (прямой) и  $AOD$ , т.е.  $\angle AOB = \angle BOD + \angle AOD = d + \frac{3}{7}d = \frac{10}{7}d$ .

**15.** Прямая  $KL$  перпендикулярна к  $OB$ . Как видно из чертежа:

$$\angle AOB = \angle BOK - \angle AOK = d - \frac{5}{7}d = \frac{2}{7}d$$

$$\text{и } \angle BOC = \angle BOL + \angle LOC = d + \frac{3}{7}d = \frac{10}{7}d,$$

а сумма их, т.е.  $\angle AOB + \angle BOC = \frac{2}{7}d + \frac{10}{7}d = \frac{12}{7}d$ .

**16.** Обозначим угол  $BCD$  через  $x$ ; тогда угол  $ACD$  равен  $4x$ . Но сумма смежных углов  $BCD$  и  $ACD$  равна  $2d$ , т.е.  $x + 4x = 2d$ , откуда  $x = \frac{2}{5}d$ .

Итак,  $\angle BCD = \frac{2}{5}d$ ,  $\angle ACD = 4x = 4 \cdot \frac{2}{5}d = \frac{8}{5}d$ .

**17.** Решается, как и предыдущая задача.

Обозначим один угол через  $x$ , тогда другой выразится  $x + \frac{2}{9}d$ .

Сумма этих (смежных) углов  $x + (x + \frac{2}{9}d) = 2d$ .

Решая это уравнение, найдем:  $x = \frac{8}{9}d$ .

Второй угол  $x + \frac{2}{9}d = \frac{8}{9}d + \frac{2}{9}d = \frac{10}{9}d$ .

**18.** Решается, как задача № 16.

Обозначим один угол через  $x$ , тогда второй угол  $= \frac{3}{7}x$ .

Значит,  $x + \frac{3}{7}x = 2d$ , откуда  $x = \frac{7}{5}d$ .

Следовательно, данный угол  $\frac{3}{7}x = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{5}d = \frac{3}{5}d$ .

**19.** Второй угол равен  $\frac{6}{5}d : 1\frac{1}{2}$ , т.е.  $\left(\frac{6}{5} : \frac{3}{2}\right)d = \frac{4}{5}d$ .

Сумма обоих углов  $\frac{6}{5}d + \frac{4}{5}d = 2d$ , а потому углы смежные.

**20.** Так как отношение углов  $= 7:3$ , то обозначим один угол через  $7x$ , а второй  $- 3x$ ; значит, разность углов  $7x - 3x = 4x$ . По условию, эта разность, т.е.  $4x = \frac{4}{5}d$ . Отсюда  $x = \frac{1}{5}d$ . Сумма углов  $7x + 3x = 10x = 10 \cdot \frac{1}{5}d$ , т.е.  $= 2d$ , а потому углы смежные.

**21.** Сумма углов  $ABC$  и  $CBD$  равна  $2d$ . Следовательно,  $\angle ABC = 2d - \frac{3}{8}d = \frac{13}{8}d$ . Биссектриса  $BF$  делит  $\angle ABC$  пополам. Следовательно,  $\angle ABF = \frac{13}{8}d : 2 = \frac{13}{16}d$ . Перпендикуляр  $EB$  образует прямой угол  $ABE$ .

Искомый угол  $EBF = \angle EBA - \angle ABF = d - \frac{13}{16}d = \frac{3}{16}d$ .



**22.** Биссектрисы  $OK$  и  $OL$  делят углы  $BOC$  и  $AOC$  пополам, т.е.  $\angle BOK = \angle KOC$  и  $\angle AOL = \angle COL$ . Сложив эти равенства почленно, получим  $\angle BOK + \angle AOL = \angle KOC + \angle COL$ . Сумма всех этих 4-х углов равна  $2d$  (ибо из всех 4-х углов составляется лишь одна пара смежных), а потому  $\angle KOC + \angle COL = d$ .

**23.** Если из суммы  $\angle AOB + \angle BOC$  вычтем сумму  $\angle AOB + \angle BOK$ , то получим угол  $KOC$ , равный половине  $BOC$  (так как  $OK$  — биссектриса). Но  $\angle AOB + \angle BOC = \frac{12}{5}d$ , а  $\angle AOB + \angle BOK = 2d$ , как пара смежных углов; следовательно,  $\angle KOC = \frac{12}{5}d - 2d = \frac{2}{5}d$ . Значит,  $\angle BOC = 2 \cdot \frac{2}{5}d = \frac{4}{5}d$ , а  $\angle AOB = \frac{12}{5}d - \frac{4}{5}d = \frac{8}{5}d$ .

**24.** Решается, как задача № 16.

Обозначим один угол через  $x$ , 2-й —  $x + \frac{1}{9}d$ , 3-й —  $x + \frac{2}{9}d$ , 4-й —  $x + \frac{3}{9}d$ . Сумма всех углов, очевидно, равна  $2d$ .

$$\text{Т.е. } x + \left(x + \frac{1}{9}d\right) + \left(x + \frac{2}{9}d\right) + \left(x + \frac{3}{9}d\right) = 2d,$$

откуда  $x = \frac{1}{3}d$ . Остальные углы соответственно равны:  $\frac{4}{9}d$ ,  $\frac{5}{9}d$ ,  $\frac{2}{3}d$ .

**25.** Т. к. крайние углы относятся как 3:5, то обозначим один угол через  $3x$ , а второй —  $5x$ . Тогда средний угол равен  $5x - 3x$  или  $2x$ . Но сумма всех углов равна  $2d$ , т.е.  $3x + 2x + 5x = 2d$ . Следовательно,  $x = \frac{1}{5}d$ ; искомые углы:  $3x = 3 \cdot \frac{1}{5}d = \frac{3}{5}d$ ;  $2x = 2 \cdot \frac{1}{5}d = \frac{2}{5}d$ ;  $5x = 5 \cdot \frac{1}{5}d = d$ .

**26.** Сумма углов, расположенных вокруг одной точки, равна  $4d$ . Следовательно, каждый угол равен  $\frac{4d}{20}$ , т.е.  $\frac{1}{5}d$ .

**27.** Из соотношения 4:5:6:3 следует, что сумма первых двух углов равна сумме третьего и четвертого [первые два угла  $AOB + COB$  содержат  $(4 + 5)$  частей, а третий и четвертый  $COD + DOA = (6 + 3)$  частей]. Но сумма всех 4-х углов равна  $4d$ . Следовательно,  $\angle AOB + \angle COB = 2d$ , т.е. эти углы смежные; значит, линия  $COA$  — прямая.

**28.** Сумма углов  $DBC$  и  $ABD$ , очевидно, равна  $4d - \frac{6}{11}d = 3\frac{5}{11}d$ . А каждый из этих углов равен  $3\frac{5}{11}d : 2 = 1\frac{9}{11}d$ .

**29.** Данный угол равен своему вертикальному. Обозначив смежный угол через  $x$ , а данный — согласно условию задачи — через  $5x$ , получим  $x + 5x = 2d$ , т.е.  $x = \frac{1}{3}d$ . Следовательно, данный угол равен  $5x = 5 \cdot \frac{1}{3}d = \frac{5}{3}d$ .



**30.** Если данный (или вертикальный) угол равен  $x$ , то смежный ему угол равен  $2d - x$ ; сумма же обоих углов, смежных с данным, равна  $2(2d - x)$ . Следовательно, (согласно условию)  $x = 2(2d - x) - 2d$  или  $3x = 2d$ , откуда  $x = \frac{2}{3}d$ .

**31.** Углы  $AOD$  и  $COB$  равны, как вертикальные. Следовательно, каждый из них равен  $\frac{22}{9}d : 2 = \frac{11}{9}d$ .

Смежный угол  $AOC = 2d - \frac{11}{9}d = \frac{7}{9}d$ .

**32.** Если данный угол обозначим через  $x$ , то смежный с ним равен  $2d - x$ , а оба угла, смежных данному, в сумме равны  $2(2d - x)$ . Сумма данного угла и двух смежных с ним, согласно условию, равна  $2\frac{3}{8}d$ , т.е.  $x + 2(2d - x) = 2\frac{3}{8}d$ , откуда  $x = \frac{13}{8}d$ .

**33.** Углы  $COE$  и  $DOF$ , очевидно, равны, ибо каждый из них, складываясь с равной парой углов ( $\angle AOB + \angle BOC$  и  $\angle AOB + \angle AOD$ ) дает в сумме  $2d$ .

Имеем:  $\angle AOB + \angle BOC + \angle DOC + \angle DOA = 4d$ . Подставив вместо  $AOB$  и  $DOC$  их величины, получим  $\angle BOC + \angle DOA = 3\frac{3}{17}d$ , а так как  $\angle BOC = \angle DOA$ , то каждый из них равен  $3\frac{3}{17}d : 2 = \frac{27}{17}d$ . Так как  $\angle AOB + \angle BOC + \angle COE = 2d$ , то  $\angle COE = 2d - \angle AOB - \angle BOC$  или  $\angle COE = 2d - \frac{5}{17}d - \frac{27}{17}d = \frac{2}{17}d$ .

## Треугольники и многоугольники. Перпендикуляры и наклонные.

**34.** Из соотношения сторон следует, что они могут быть обозначены соответственно:  $2x$ ,  $5x$ ,  $4x$ ,  $8x$ . Периметр 4-угольника  $2x + 5x + 4x + 8x = 76$  м. Отсюда  $x = 4$  м. Стороны равны:  $2x = 2 \cdot 4 = 8$  м;  $5x = 5 \cdot 4 = 20$  м;  $4x = 4 \cdot 4 = 16$  м;  $8x = 8 \cdot 4 = 32$  м.

**35.** Пусть  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$  обозначены через  $2x$ ,  $3x$ ,  $4x$ ,  $10x$ . Как видно из чертежа, диагональ  $AC$  (рассматривая тр-к  $ABC$ ) меньше  $AB + BC$ , т.е. меньше  $2x + 3x$ ; рассматривая же тр-к  $ACD$ , видим, что та же диагональ  $AC$  больше  $AD - DC$ , т.е. больше  $10x - 4x$ . В первом случае  $AC < 5x$ , а во втором  $AC > 6x$ . Оба неравенства несовместимы, а потому задача невозможна.

**36.** Обозначим стороны 4-угольника соответственно через  $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , а диагональ через  $D$ .

Имеем:  $k + l + D = 25$  м (1),  $(m + n + D) = 27$  м (2) и  $k + l + m + n = 32$  м (3). Сложив почленно (1) и (2) и вычтя из полученной суммы равенство (3), получим  $2D = 20$  м, откуда  $D = 10$  м.

**37.** 1) В  $n$ -угольнике  $n$  вершин. Если любую вершину соединить с остальными, то число всех диагоналей, проведенных из этой вершины, равно  $n - 3$  (так как из  $n$  вершин надо исключить данную вершину и две смежных вершины, которые с данной уже соединены, как стороны многоугольника).



2) Число всех линий, которые получаются от соединения попарно  $n$  точек, равно (зад. № 12)  $\frac{(n-1)n}{2}$ . Если из этого числа вычесть  $n$  — число сторон  $n$ -угольника, то получится число всех диагоналей, проведенных в данном  $n$ -угольнике, т.е.  $\frac{(n-1)n}{2} - n = \frac{(n-3)n}{2}$ .

Подставив в эту формулу вместо  $n$  числа 10, 20, 25, получим

$$\frac{(10-3)10}{2} = 35; \quad \frac{(20-3)20}{2} = 170; \quad \frac{(25-3)25}{2} = 275.$$

Эту же формулу можно вывести и так:

Из одной вершины можно провести  $(n-3)$  диагонали, а из всех  $n$  вершин  $(n-3)n$ . Но каждая диагональ, таким образом, дважды входит в расчет; так, когда соединяем вершину  $A$  с остальными вершинами, получим  $AC, AD, \dots$ , а когда соединяем вершину  $C$  с остальными, то получаем  $CA, CD, \dots$ , т.е. дважды получаем  $AC$ . Следовательно, всех диагоналей, на самом деле, будет  $\frac{(n-3)n}{2}$ .

**38.** Пусть число сторон многоугольника  $x$ . Число диагоналей, проведенных из одной вершины, выразится через  $(x-3)$ . Значит,  $x = (x-3)m$ .

Отсюда  $x = \frac{3m}{m-1}$ . Подставив 2, 4, 5 вместо  $m$ , получим

$$x = \frac{3 \cdot 2}{2-1} = 6; \quad x = \frac{3 \cdot 4}{4-1} = 4; \quad x = \frac{3 \cdot 5}{5-1} = \frac{15}{4}.$$

$m$  должно быть подобрано так, чтоб  $3m$  было кратным  $m-1$ : потому что  $x$ , т.е. число сторон многоугольника, может быть только целым числом; последний случай, при  $m=5$ , дает дробное число; значит,  $m$  не может быть равно 5.  $\times$

**39.** Число всех диагоналей в  $n$ -угольнике (зад. № 37) равно  $\frac{(n-3)n}{2}$ . Значит,  $\frac{(n-3)n}{2} = mn$ . Решив уравнение, получим

$n = 2m + 3$ . Подставив вместо  $m$  в эту формулу:  $\frac{1}{2}, 1, 2, \frac{5}{2}$  получим:  $n = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 4$ ;  $2 \cdot 1 + 3 = 5$ ;  $2 \cdot 2 + 3 = 7$ ;  $2 \cdot \frac{5}{2} + 3 = 8$ .

**40.** Обозначив боковую сторону через  $x$ , получим уравнение:  $x + x + 0,4 m = 1 m$ , откуда  $x = 0,3 m$ .





2) Рассматривая образовавшиеся тр-ки, составим неравенства (зад. № 42)

$$k+m > c; \quad l+m > b; \quad k+l > a.$$

Сложив почленно эти неравенства, получим

$$2(k+l+m) > a+b+c \quad \text{или} \quad k+l+m > \frac{a+b+c}{2}.$$

**47.** Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  данные тр-ки. Приложим тр-к  $A_1B_1C_1$ , как показано на чертеже, к тр-ку  $ABC$ . Получится фигура тр-ка  $AC(C_1)B_1$ .

Из тр-ка  $ABC$  имеем:

$$AD = \frac{24.5}{8} = 15 \text{ м}; \quad BD = \frac{24.3}{8} = 9 \text{ м}.$$

Высота в тр-ке  $AC(C_1)B_1$  делит основание  $AB_1$  пополам, т.е.  $AD = DB_1 = 15 \text{ м}$ . Но отрезок  $DB(A_1) = DB = 9 \text{ м}$ . Следовательно,  $A_1B_1 = B(A_1)B_1 = 15 - 9 = 6 \text{ м}$ .

**48.** Обозначим длину  $AC$  через  $x$ . Отрезок  $DC = AD$ , т. к. в тр-ке  $ADC$  углы  $ACD$  и  $DAC$  равны. По условию

$$AB + BC + x = 37 \text{ м (1)}; \quad AB + AD + BD = 24 \text{ м (2)}.$$

Заменяя в равенстве (2)  $AD$  через  $DC$ , получим:

$$AB + DC + BD = 24 \text{ м (3)}.$$

Но  $DC + BD$  можно заменить одной прямой  $BC$ , а потому равенство (3) переписывается так:  $AB + BC = 24 \text{ м}$ . Подставляя в (1) вместо суммы  $AB + BC$  ее числовое значение  $24 \text{ м}$ , получим  $24 + x = 37 \text{ м}$ , откуда  $x = 13 \text{ м}$ .

**49.** Обозначим высоту  $BD$  через  $h$ ;  $AB = BC = a$ ;  $AC = b$ .

$$\text{Тогда } a + a + c = 50 \text{ м (1)}; \quad a + h + \frac{c}{2} = 40 \text{ м (2)}.$$

$$\text{Разделив равенство (1) пополам, получим } a + \frac{c}{2} = 25 \text{ м (3)}.$$

Вычтя почленно из (2) равенства (3), найдем  $h = 15 \text{ м}$ .

**50.** Тр-к  $ABE$  равнобедренный, ибо высота  $ED$  делит основание  $AB$  пополам (по условию), следовательно,  $AE = BE$ ; вместо  $AE + EC$  можно написать  $BE + EC$  или  $BC$ .

По условию,  $AE + EC + AC = 24 \text{ см}$  или, заменив  $AE + EC$  через  $BC = AB = 14 \text{ см}$ , получим  $14 + AC = 24 \text{ см}$ , откуда  $AC = 10 \text{ см}$ .

**51.** Получается (черт. 49) равнобедренный тр-к с основанием  $AC = 16 \text{ м}$ . Проекция наклонных  $AD = DC = \frac{16}{2} = 8 \text{ м}$ .

52. Пусть  $AB = BC = a$ ,  $AC = b$ , медианы  $AD = CE = m$ .

По условию  $AC + AE + EC = AB + BD + AD + 5$  см.

$$\text{или } b + \frac{a}{2} + m = a + \frac{a}{2} + m + 5 \text{ см, откуда } b - a = 5 \text{ см (1).}$$

Кроме того имеем:  $AB + BC + AC = 35$  см, или  $2a + b = 35$  см (2).

Решая ур-ия (1) и (2) совместно, получим:  $a = 10$  см,  $b = 15$  см.

### Параллельные линии. Сумма углов треугольника и многоугольника.

53. Часть углов равна  $\frac{4}{5}d$ , часть —  $1\frac{1}{5}d$ .

54. Угол  $KMB$  равен половине  $\angle NMB$ , т.-е.  $\frac{11}{8}d : 2 = \frac{11}{16}d$ .

Биссектриса  $MK$  образует с линией  $CD$  угол  $MKN$ , равный своему накрест-лежащему углу  $KMB = \frac{11}{16}d$ .

55. Из этих углов два равны между собою, а третий составляет с одним из равных  $2d$ . Если обозначить равные углы через  $x$ , тогда  $x + x + (2d - x) = \frac{23}{7}d$ ; откуда  $x = \frac{9}{7}d$ .

56. Для того, чтобы  $AB$  и  $CD$  были параллельны, необходимо, чтобы  $\angle NMB + \angle MND = 2d$ ; но  $\angle MND = \angle CNF = \frac{3}{16}d$ , а  $\angle NMB = \frac{3}{4}d$ , что в сумме дает  $\frac{3}{16}d + \frac{3}{4}d = \frac{15}{16}d$ .

Следовательно, прямые  $AB$  и  $CD$  не параллельны.

Чтобы они стали параллельными, необходимо повернуть одну из этих прямых так, чтобы один из данных углов увеличился на  $1\frac{1}{16}d$  (чтобы сумма углов стала равной  $2d$ ), или повернуть обе прямые так, чтоб полученные от этого изменения углы в сумме дали увеличение на  $1\frac{1}{16}d$ .

57. Прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны, ибо сумма внутренних односторонних углов равна  $\frac{29}{24}d + \frac{19}{24}d = 2d$ . Следовательно,

$$\angle DSH = \angle CSN = 2d - \frac{11}{8}d = \frac{5}{8}d.$$

58. Сумма всех углов тр-ка равна  $2d$ . Следовательно, иско-  
мый угол равен  $2d - \left( \frac{7}{6}d + \frac{3}{8}d \right) = \frac{11}{24}d$ .

59. Из соотношения углов следует, что они равны соответ-  
ственно:

$$\frac{2d}{6}; \quad \frac{2d}{6} \cdot 2; \quad \frac{2d}{6} \cdot 3 \quad \text{или} \quad \frac{1}{3}d; \quad \frac{2}{3}d; \quad d.$$



12 **60.** Если первый угол обозначим через  $5x$ , то второй угол выразится через  $7x$ , а третий через  $5x + \frac{4}{19}d$ . Сумма углов тр-ка равна  $2d$ , т.е.  $5x + 7x + \left(5x + \frac{4}{19}d\right) = 2d$ . Отсюда  $x = \frac{2}{19}d$ . Первый угол равен  $5 \cdot \frac{2}{19}d$  или  $\frac{10}{19}d$ , третий угол равен  $\frac{10}{19}d + \frac{4}{19}d = \frac{14}{19}d$ .

**61.** Так как сумма острых углов прямоугольного тр-ка равна  $d$ , то искомый угол равен  $d - \frac{12}{17}d = \frac{5}{17}d$ .

24 **62.** 1) Если один острый угол прямоугольного тр-ка равен  $\frac{d}{2}$ , то и второй острый угол тоже равен  $\frac{d}{2}$  (зад. 61). Следовательно, треугольник — равнобедренный, т.е. катеты равны между собою, и каждый из них равен  $\frac{36}{2} = 18$  см.

2) Высота  $CD$  делит основание  $AB$  и угол  $C$  (прямой) пополам (ибо треугольник равнобедренный:  $AC = BC$ ); следовательно,  $\angle BCD = \angle ACD = \frac{1}{2}d$ :

Таким образом и тр-к  $BCD$  равнобедренный, ибо угол  $B$  равен  $\angle BCD = \frac{d}{2}$ . Следовательно,  $CD = BD = \frac{AB}{2}$ . Но по условию  $AB + CD = 12$  см. Заменяя в этом равенстве  $CD$  через  $\frac{AB}{2}$ , получим  $AB + \frac{AB}{2} = 12$  см, откуда  $AB = 8$  см.

**63.** 1) Угол при вершине  $C$  тупой. В самом деле, опустив высоту  $CD$ , получим два прямоугольных тр-ка  $ACD$  и  $BCD$ , равных между собою. Рассмотрим тр-к  $ACD$ . Катет  $AD = \frac{AB}{2} = 5$  дм, катет  $CD = 4$  дм, следовательно,  $\angle ACD > \angle CAD$ . То же и в треугольнике  $BCD$ , т.е.  $\angle BCD > \angle CBD$ . Сложив почленно оба неравенства, получим:

$$\angle ACD + \angle BCD > \angle CAD + \angle CBD \text{ или } \angle ACB > \angle CAD + \angle CBD.$$

Но сумма углов тр-ка равна  $2d$ ; следовательно, угол  $ACB$  более половины  $2d$ , т.е. этот угол тупой.

2) Подобным же рассуждением докажем, что угол при вершине острый.

3) В прямоугольном тр-ке  $ACD$  катет  $AD = \frac{AB}{2} = \frac{1 \text{ м}}{2} = 0,5 \text{ м}$ .

Но и катет  $CD = 0,5 \text{ м}$ ; следовательно, этот тр-к равнобедрен-

ный, и  $\angle DAC = \angle ACD = \frac{d}{2}$ . Но тр-ки  $ADC$  и  $BCD$  равны, следовательно и  $\angle BCD = \frac{d}{2}$  (или: высота в равнобедренном тр-ке делит угол при вершине пополам, в виду чего

$$\angle ACD = \angle BCD = \frac{d}{2}.$$

Следовательно, угол при вершине, т.-е.  $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD = d$ .

**64.** Вычтя  $\frac{9}{7}d$  из  $2d$  и разделив разность пополам, получим углы при основании,  $\frac{2d - \frac{9}{7}d}{2} = \frac{5}{14}d$ .

**65.** Решается, как зад. № 64.  $2d - \frac{5}{9}d \cdot 2 = \frac{8}{9}d$ .

**66.** Обозначим угол  $A$  через  $x$ ; тогда  $\angle ACD = x - \frac{1}{7}d$ , а сумма углов  $A$  и  $ACD = x + x - \frac{1}{7}d$  равна  $d$ , т.-е.  $x + x - \frac{1}{7}d = d$ , откуда  $x = \frac{4}{7}d$ . Угол при вершине равен  $2d - 2 \cdot \frac{4}{7}d = \frac{6}{7}d$ .

Тот же результат получим, умножив  $\angle ACD$  на 2:

$$(\frac{4}{7}d - \frac{1}{7}d) \cdot 2 = \frac{6}{7}d.$$

**67.** Пусть  $ABC$ —прямоугольный тр-к, у которого угол  $A$  равен  $60^\circ$  (т.-е.  $\frac{2}{3}d$ ). Угол  $B$ , очевидно, равен тогда  $d - \frac{2}{3}d = \frac{1}{3}d$  или  $30^\circ$ . Пристроим к этому треугольнику равный ему треугольник так, чтоб вся фигура приняла вид  $AA_1B$ . Образовавшийся тр-к  $AA_1B$ —равносторонний, т. к. все углы равны по  $60^\circ$  (угол  $A_1 = A = 60^\circ$ , а угол  $B$  равен  $\angle A_1BC + \angle ABC = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ ); следовательно,  $A_1B = AB = AA_1$ , а  $AC = \frac{AA_1}{2} = \frac{AB}{2}$ , т.-е. катет, лежащий против угла в  $30^\circ$  (или прилежащий углу в  $60^\circ$ ), равен половине гипотенузы.

И наоборот: если катет равен половине гипотенузы, то противолежащий ему угол равен  $30^\circ$  (или прилежащий ему угол равен  $60^\circ$ ). Способ доказательства тот же.

Обозначим гипотенузу через  $c$ , тогда катет  $AC = \frac{c}{2}$ , а катет  $BC$  выразится (как увидим впоследствии, по Пифагоровой теореме)  $\sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c}{2} \sqrt{3}$ , или  $b \sqrt{3}$ , если через  $b$  обозначим катет, лежащий против угла в  $30^\circ$ .

Итак, пусть катет  $AC$  (меньший, т. к. он лежит против меньшего угла в  $30^\circ$ ) будет  $x$ , тогда гипотенуза равна  $2x$ , и по условию  $x + 2x = 1,8$  м, откуда  $x = 0,6$  м. Гипотенуза  $2x = 1,2$  м.



68. Обозначим внешний угол  $DBC$  через  $x$ , тогда  $\angle A = \frac{x}{3}$ ,

а угол  $C = x - \frac{4}{9}d$ . Но внешний угол равен сумме внутренних несмежных углов, т.е.  $\angle A + \angle C = \angle B$  или

$$\frac{x}{3} + \left(x - \frac{4}{9}d\right) = x.$$

Отсюда  $x = \frac{4}{9}d$ . Угол  $B = 2d - \angle DBC = 2d - \frac{4}{9}d = \frac{14}{9}d$ ;  
угол  $A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}d = \frac{4}{27}d$ ;  $\angle C = \frac{4}{9}d - \frac{4}{9}d = 0$ .

69. Угол при вершине обозначим через  $x$ ; тогда углы при основании равны по  $x + \frac{1}{10}d$ . Составим уравнение:  
 $(x + \frac{1}{10}d) + (x + \frac{1}{10}d) + x = 2d$ . Отсюда  $x = \frac{3}{5}d$ .

Угол при основании тр-ка равен  $\frac{3}{5}d + \frac{1}{10}d = \frac{7}{10}d$ .

70. Внешний угол получится, когда из  $\frac{21}{8}d$  вычтем  $2d$ , т.е. сумму всех углов треугольника:  $\frac{21}{8}d - 2d = \frac{5}{8}d$ .

Если так, то смежный с ним угол тр-ка равен  $2d - \frac{5}{8}d = \frac{11}{8}d$ , т.е. этот угол тупой. Тупой угол не может быть в основании равнобедренного тр-ка, ибо тогда одна только сумма углов при основании была бы более  $2d$ , что невозможно. Значит, тупой угол будет вершиной равнобедренного тр-ка. Каждый же из углов при основании равен  $\frac{2d - \frac{11}{8}d}{2} = \frac{5}{16}d$ .

71. Сумма внутренних односторонних углов равна  $2d$ ; следовательно, сумма половин этих углов равна  $d$ , т.е.  $\angle OMN + \angle ONM = d$ , а угол  $MON$  равен  $2d - d = d$ ; т.е. биссектрисы пересекаются под прямым углом.

72. Сумма острых углов прямоуг. тр-ка равна  $d$ . Следовательно, сумма половин их равна  $\frac{d}{2}$ ; т.е.  $\angle MCA + \angle MAC = \frac{d}{2}$ .

Из тр-ка  $AMC$  имеем:  $\angle AMC = 2d - (\angle MCA + \angle MAC)$  или

$$\angle AMC = 2d - \frac{d}{2} = \frac{3}{2}d.$$

73. Угол  $ABC$  равен  $2d - (\angle BAC + \angle BCA)$ . Угол  $AMC$  равен  $2d - (\angle MAC + \angle MCA)$ .

Но  $\angle MAC + \angle MCA = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA)$ .

Следовательно,  $\angle AMC = 2d - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA)$ .

По условию,  $\angle AMC = 2\angle ABC$ . Подставив вместо  $\angle AMC$  и  $\angle ABC$  приведенные выше значения, получим:

$$2d - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = 2 \cdot [2d - (\angle BAC + \angle BCA)].$$

Перепишем последнее равенство так:

$$2d - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = 4d - 2(\angle BAC + \angle BCA)$$

отсюда  $\angle BAC + \angle BCA = \frac{4}{3}d$ .

Угол же  $ABC = 2d - (\angle BAC + \angle BCA) = 2d - \frac{4}{3}d = \frac{2}{3}d$ .

**74.** Суммы  $\angle BCE + \angle BCA = 2d$  и  $\angle BAC + \angle BAD = 2d$  (как суммы смежных углов);  $\angle BCA + \angle BAC = d$  (сумма острых углов прямоуг. тр-ка).

Следоват.,  $\angle BCE + \angle BAD = (\angle BCE + \angle BCA) + (\angle BAC + \angle BAD) - (BCA + \angle BAC) = 2d + 2d - d = 3d$ .

Сумма углов:  $\angle ECK + \angle DAL = \angle \frac{BCE}{2} + \angle \frac{BAD}{2} = \frac{1}{2}(\angle BCE + \angle BAD) = \frac{3}{2}d$ . Но  $\angle ECK = \angle MCA$  и  $\angle DAL = \angle MAC$ , как углы вертикальные.

Следовательно,  $\angle MCA + \angle MAC = \angle ECK + \angle DAL$ ,

а потому,  $\angle AMC = 2d - (\angle MCA + \angle MAC) = 2d - \frac{3}{2}d = \frac{d}{2}$ .

**75.** Примечание. Боковая высота—высота, опущенная на боковую сторону треугольника.

Из прямоугольного треугольника  $ABD$  имеем:

$$\angle ABD = d - \frac{8}{15}d = \frac{7}{15}d.$$

Угол  $BAC$ , очевидно, равен  $\angle ABC$  (как углы при основании равнобедр. тр-ка), а угол при вершине, т.-е.

$$\angle ACB = 2d - 2 \cdot \frac{7}{15}d = \frac{1}{15}d.$$

**76.** 1) Из прямоуг. тр-ка  $ABD$  имеем:

$$\angle ABD = d - \angle DAB = d - \frac{1}{5}d = \frac{4}{5}d.$$

$$\angle C = \frac{2d - \angle B}{2} = \frac{2d - \frac{4}{5}d}{2} = \frac{3}{5}d.$$

2) Из прямоуг. тр-ка  $ADC$  имеем:

$$\angle ABD = d - \angle BAD = d - \frac{1}{5}d = \frac{4}{5}d.$$

Но угол  $ABC$ , как смежный углу  $ABD$ , равен

$$2d - \angle ABD = 2d - \frac{4}{5}d = \frac{6}{5}d.$$

Углы при основании, следовательно, равны

$$\frac{2d - \frac{6}{5}d}{2} = \frac{2}{5}d.$$



77. Обозначим равные углы  $A$  и  $C$  через  $x$ :

тогда  $\angle ACD = \frac{x}{2}$ . Зависимость между углами тр-ка  $ACD$  такая:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{5}{3}d = 2d; \text{ откуда } x = \frac{2}{9}d.$$

Из тр-ка  $ABC$ :  $\angle B = 2d - (\angle A + \angle C) = 2d - 2 \cdot \frac{2}{9}d = \frac{14}{9}d$ .

78. Пусть медиана  $CD$  стороны  $AB$  равна  $\frac{AB}{2}$ ,

т.-е.  $CD = AD = BD$ . Из равнобедренных тр-ков  $ACD$  и  $BCD$  имеем:  $\angle A = \angle ACD$  и  $\angle B = \angle BCD$ . Сложим почленно эти равенства

$$\angle A + \angle B = \angle ACD + \angle BCD = \angle ACB.$$

Так как  $\angle A + \angle B + \angle ACB = 2d$ , то, очевидно,  $\angle ACB = d$ .

79. Данный тр-к —  $ABC$ .

Внешние углы  $BCE$  и  $BAD$  соответственно равны  $2d - \angle BCA$  и  $2d - \angle BAC$ . Так как  $CE = BC$  и  $AB = AD$ , то тр-ки  $BCE$  и  $ABD$  равнобедренные. Из тр-ка  $BCE$  имеем:

$$\angle CEB = \angle CBE = \frac{2d - \angle BCE}{2} = \frac{2d - (2d - \angle BCA)}{2} = \frac{\angle BCA}{2}.$$

Из тр-ка  $BAD$  имеем:

$$\angle ADB = \angle ABD = \frac{2d - \angle BAD}{2} = \frac{2d - (2d - \angle BAC)}{2} = \frac{\angle BAC}{2}.$$

(Те же результаты получаем применив теорему: внешний угол тр-ка равен сумме внутренних его углов, несмежных с ним. Рассматриваем  $\angle BEC$  как половину  $\angle BCA$  и т. д.).

Рассматривая тр-к  $DBE$ , находим:

$$\begin{aligned} \angle DBE &= 2d - (\angle ADB + \angle CEB) = 2d - \left( \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle BCA}{2} \right) = \\ &= 2d - \frac{\angle BAC + \angle BCA}{2}; \text{ но из тр-ка } ABC \text{ имеем:} \end{aligned}$$

$$\angle BAC + \angle BCA = 2d - \angle ABC.$$

$$\text{Следовательно, } \angle DBE = 2d - \frac{2d - \angle ABC}{2} = d + \frac{\angle ABC}{2}.$$

Последний результат получается также, если сложить  $\angle ABC$  с прилежащими углами  $DBA$  и  $EBC$ , величина которых найдена выше.

80. Из прямоугольного тр-ка  $ACE$  имеем:

$$\angle ECA = d - \frac{1}{4}d = \frac{3}{4}d;$$

Из прямоугольного тр-ка  $ACD$  имеем:  $\angle DAC = d - \frac{5}{6}d = \frac{1}{6}d$

Из тр-ка  $AMC$  имеем:

$$\angle AMC = 2d - (\angle MCA + \angle MAC) = 2d - \left( \frac{3}{4}d + \frac{1}{6}d \right) = \frac{13}{12}d.$$

81. Угол  $EBD$  (равный искомому  $\angle ABC$ ) определится из четырехугольника  $EMDB$ , в котором  $\angle AMC = \frac{8}{15}d$ , а углы  $BEM$  и  $MDB$  прямые.

Заметим, что сумма углов во всяком 4-угольнике равна  $4d$ . Для доказательства проводим одну диагональ; 4-угольник разделится на 2 тр-ка, сумма углов которых равна  $4d$ ; но сумма углов этих тр-ков одновременно является и суммой углов 4-угольника.

Следовательно,  $\angle EBD = 4d - (d + d + \frac{8}{15}d) = \frac{22}{15}d$ . Значит, и  $\angle ABC$ , как вертикальный углу  $EBD$ , равен  $\frac{22}{15}d$ .

Рассматривая равнобедренный тр-к  $ABC$ , найдем:

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{2d - \angle ABC}{2} = \frac{2d - \frac{22}{15}d}{2} = \frac{4}{15}d.$$

82. Угол  $DCE$ —прямой (зад. 22). Из прямоуг. тр-ка  $DEC$  имеем:

$$\angle DEC = d - \angle EDC = d - \frac{6}{17}d = \frac{11}{17}d.$$

83. Образовавшийся тр-к  $BCE$ —равнобедр., ибо высота его  $ED$  делит основание  $BC$  пополам; следовательно,  $\angle EBC = \angle ECB$ . Но  $\angle EBC : \angle EBA = 2 : 5$ ; а потому обозначим  $\angle EBC$  через  $2x$ ,  $\angle EBA$  через  $5x$ ; тогда  $\angle ABC = 7x$ ,  $\angle ACB = 2x$ . Так как  $\angle ABC + \angle BCA = d$ , т.е.  $7x + 2x = d$  и  $x = \frac{1}{9}d$ , то  $\angle ABC = 7x = \frac{7}{9}d$ .

84. Углы  $KCD$  и  $KDC$ , как внешние, соответственно равны:

$$\angle KCD = 2d - \frac{3}{4}d = \frac{5}{4}d \text{ и } \angle KDC = 2d - \frac{23}{12}d = \frac{1}{12}d.$$

Из тр-ка  $KCD$  имеем:  $\angle K = 2d - (\angle KCD + \angle KDC) = 2d - (\frac{5}{4}d + \frac{1}{12}d) = \frac{2}{3}d$ . Но  $\angle K + \angle B = \frac{2}{3}d + \frac{4}{3}d = 2d$ , т.е. внутренние односторонние углы равны  $2d$ , а потому прямые  $AB$  и  $ED$  параллельны.

85. Сумма внутренних углов  $n$ -угольника равна  $2dn - 4d$ .

Подставив вместо  $n$  последовательно: 7, 10 и 25, получим:

1)  $2d \cdot 7 - 4d = 10d$ ; 2)  $2d \cdot 10 - 4d = 16d$ ; 3)  $2d \cdot 25 - 4d = 46d$ .

86. В  $n$ -угольнике сумма внутренних углов равна  $2dn - 4d$ , в  $(n+5)$ -угольнике  $2d(n+5) - 4d$ .

Вычтя первое выражение из второго, получим:

$$[2d(n+5) - 4d] - (2dn - 4d) = 10d.$$

87. Из ур-ия  $2dn - 4d = 30d$  имеем:  $n = 17$ .

Точно так же во 2-м случае  $n = 26$ .

В 3-м случае, решая уравнение  $2dn - 4d = 57d$ , получим  $n = \frac{61}{2}$ , что указывает на неправильность условия, ибо  $n$  (число сторон многоугольника) не может быть дробным.

88. Сумма внутренних углов многоугольника  $= (2dn - 4d)$ —число четное; внешний же угол меньше  $2d$ .



Если сумма внутренних углов вместе с одним из внешних равна  $23d$ , то, сумма одних только внутренних углов должна быть равна  $22d$ . Итак,  $2dn - 4d = 22d$ , откуда  $n = 13$ .

**89.** Каждая пара смежных углов многоугольника (внутренний угол плюс его смежный) равна  $2d$ , а так как всех пар углов  $n$ , то сумма всех внутренних и внешних (взятых по одному, либо образованных продолжением сторон многоугольника в одном направлении) углов многоугольника равна  $2dn$ . Но сумма внутренних его углов равна  $2dn - 4d$ . Следовательно, сумма внешних углов равна  $2dn - (2dn - 4d) = 4d$ .

По условию,  $2dn - 4d = 4d \cdot m$ , откуда  $n = 2(m + 1)$ .

**90.** Обозначив один угол через  $x$ , 2-й —  $7x$ , 3-й ( $7x - 5x$ ) или  $2x$ , 4-й —  $(2x - \frac{4}{11}d)$ , составим уравнение (зад. № 81):

$$5x + 7x + 2x + (2x - \frac{4}{11}d) = 4d. \text{ Отсюда } x = \frac{3}{11}d.$$

Углы равны:

$$5 \cdot \frac{3}{11}d = \frac{15}{11}d; 7 \cdot \frac{3}{11}d = \frac{21}{11}d; 2 \cdot \frac{3}{11}d = \frac{6}{11}d; \frac{6}{11}d - \frac{4}{11}d = \frac{2}{11}d.$$

### Параллелограммы и трапеции.

**91.** Угол, противоположный данному, также равен  $\frac{3}{7}d$ , а каждый из остальных равен  $2d - \frac{3}{7}d = \frac{11}{7}d$ .

**92.** Обозначим один угол через  $x$ , тогда односторонний равен  $2d - x$ . По условию  $(2d - x) - x = \frac{3}{11}d$ . Отсюда  $x = \frac{19}{22}d$ . Второй угол равен  $2d - x = 2d - \frac{19}{22}d = \frac{25}{22}d$ .

**93.** Если одна сторона параллелограмма равна 9 см, то и противоположная сторона — 9 см. Обозначим периметр параллелограмма через  $x$ . Тогда  $\frac{3}{10}x = 9$ ;  $x = 30$  см.

Следовательно, каждая из двух остальных сторон равна

$$\frac{30 - 2 \cdot 9}{2} = 6 \text{ см.}$$

**94.** Если периметр параллелограмма равен 2,8 см, то половина его (сумма двух смежных сторон) равна  $\frac{2,8}{2} = 1,4$  см.

Если отношение смежных сторон 3:4, то одну сторону обозначим  $3x$ , а вторую  $4x$ .

Тогда  $3x + 4x = 1,4$  см, откуда  $x = 0,2$ ;  $3x = 0,6$  см;  $4x = 0,8$  см.

**95.** Углы  $EAB$  и  $DAE$  равны (по условию);  $\angle AEB = \angle DAE$ , следовательно, тр-к  $ABE$  равнобедренный и  $BE = AB = 9$  см.

Но  $BC = AD = 15$  см, следов.,  $EC = BC - BE = 15 - 9 = 6$  см.

**96.** Обозначим стороны параллелограмма через  $a$  и  $b$ , а диагонали  $AC$  и  $BD$  через  $D$  и  $d$ . Тогда периметр тр-ка  $ABC = a + b + D$ , а периметр тр-ка  $BCD = a + b + d$ . Разность периметров



$(a + b + D) - (a + b + d) = D - d = 4 \text{ м}$ . Сумма этих периметров  $(a + b + D) + (a + b + d) = 2a + 2b + D + d$ . Периметр параллелограмма  $2a + 2b$ . Разность между последними двумя выражениями  $(2a + 2b + D + d) - (2a + 2b) = D + d = 1 \text{ м}$  или  $10 \text{ дм}$ ; имея сумму и разность диагоналей:  $D - d = 4 \text{ м}$  и  $D + d = 10 \text{ дм}$ , решаем эту систему уравнений и получаем:  $D = 7 \text{ дм}$ ,  $d = 3 \text{ дм}$ .

**97.** Диагонали параллелограмма взаимно делятся пополам. Образуются (черт. зад. № 96) четыре тр-ка.

1) Возьмем тр-к  $ODC$ . Составим неравенство (по теореме: сумма двух сторон тр-ка больше третьей):  $OD + OC > DC$ , но  $OD = \frac{4}{2} = 2 \text{ м}$ ;  $OC = \frac{6}{2} = 3 \text{ м}$ ;  $DC = 5 \text{ м}$ . Подставив эти значения в неравенство, видим, что получается абсурд:  $5 > 5$ . Задача невозможна.

2) Тоже невозможный случай. (Рассуждаем, как и в п. 1).

3) Случай возможный, ибо  $3 + 3\frac{1}{2} > 5$ .

**98.** Разность периметров (черт. зад. № 96)  $ODC$  и  $OCB$

$$(DC + OD + OC) - (OB + OC + BC) = 1 \text{ м}.$$

Но  $OD = OB$  (диагонали параллелограмма взаимно делятся пополам); следов., равенство можно переписать так:  $DC - BC = 1 \text{ м}$ .

Так как периметр параллелограмма равен  $12 \text{ м}$ , то половина периметра его  $DC + BC = \frac{12}{2} = 6 \text{ м}$ .

Решая последние два уравнения (переписав их:  $x - y = 1$ ,  $x + y = 6$ ), получим  $DC = 3\frac{1}{2} \text{ м}$ ,  $BC = 2\frac{1}{2} \text{ м}$ .

**99.** Треугольники  $BOE$  и  $DOF$  равны, так как  $OD = OB$  (зад. 97),  $\angle BOE = \angle FOD$  (как вертикальные), а  $\angle EBO = \angle ODF$  (как накрест-лежащие). Из равенства треугольников следует, что  $BE = FD = 2 \text{ м}$ . Но  $AD = AF + FD = 2,8 + 2 = 4,8 \text{ м}$ , следоват., и  $BC$  равна  $4,8 \text{ м}$ .

**100.** Угол  $FAE$  равен сумме углов  $FAD + DAE$ ;  $\angle FAD$  — прямой ( $AF$  перпендикулярна к  $BC$ , значит, перпендикулярна и к параллельной ей  $AD$ ), следовательно,  $\angle DAE = \angle FAE - \angle FAD = = \frac{16}{11}d - d = \frac{5}{11}d$ . Угол параллелограмма  $\angle BAD = \angle BAE - \angle DAE = = d - \frac{5}{11}d = \frac{6}{11}d$ , а угол  $ABC = 2d - \frac{6}{11}d = \frac{16}{11}d$ .

**101.** Тр-к  $ABD$  равнобедренный (высота  $BE$  делит основание  $AD$  пополам), т.е.  $AB = BD$ . Если обозначим  $AB$  через  $a$ ,  $BC$  через  $b$ , тогда и  $BD$  будет  $a$ . Следовательно,  $2a + 2b = 3,8$  (1),  $(2a + 2b) - (a + b + a) = 1 \text{ м}$  или  $b = 1 \text{ м}$ . Подставив значение  $b$  в (1), получим  $a = 0,9 \text{ м}$ .



**102.** Положим,  $AB$  меньшая сторона прямоугольника  $ABCD$ , а  $AD$  — большая.

В прямоугольном тр-ке  $ABD$  углом, равным  $\frac{2}{5}d$ , очевидно, будет  $\angle ADB$  (т. к. если один острый угол прямоугольного тр-ка  $= \frac{2}{5}d$ , то второй острый угол  $= \frac{3}{5}d$ , и угол, равный  $\frac{2}{5}d$ , как меньший, лежит против меньшей стороны). Искомый угол  $COD$ , как внешний угол тр-ка,  $AOD$  равен  $\angle ADO + \angle OAD = 2 \cdot \frac{2}{5}d = \frac{4}{5}d$ , т. к.  $\angle ADO = \angle OAD$ .

**103.** Если обозначим (черт. зад. 102)  $\angle OAD = \angle ODA$  через  $x$ , то  $\angle AOD = x + \frac{1}{3}d$ . Составив уравнение:

$$x + x + (x + \frac{1}{3}d) = 2d, \text{ получим } x = \frac{5}{9}d.$$

**104.** Перпендикуляр  $OK$  равен  $AL = \frac{AD}{2}$ ; перпендикуляр  $OL = AK = \frac{AB}{2}$ . Обозначив  $AD$  через  $a$  и  $AB$  через  $b$ , имеем:

$$OK - OL = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = 4 \text{ см или } a - b = 8 \text{ см.}$$

Периметр  $2a + 2b = 56$  см, отсюда  $a + b = 28$  см. Решая эти ур-ия, получим  $a = 18$  см,  $b = 10$  см.

**105.** Треугольник  $AOB$  (черт. зад. № 102) равносторонний, ибо  $\angle AOB = \frac{2}{3}d$ , а углы  $ABO$  и  $BAO$  равны между собой ( $BO = AO$ ) и составляют  $\frac{2d - \frac{2}{3}d}{2} = \frac{2}{3}d$ . Но  $AO$  — половина диагонали. Обозначим меньшую сторону прямоугольника через  $a$ , тогда диагональ выразится через  $2a$ ; получим  $2 \cdot 2a + 2a = 3,6$  м; отсюда  $a = 0,6$  м, диагональ  $2a = 1,2$  м.

**106.** Тр-ки  $ABM$  и  $MCD$  равны (катеты  $AB = CD$ ,  $BM = MC$ ), следовательно,  $\angle AMB = \angle DMC$ ; но  $\angle AMD$  — прямой, следовательно,  $\angle AMB = \angle DMC = \frac{d}{2}$ ; таким образом, тр-к  $ABM$  равнобедренный (зад. № 62), и  $AB = BM$ .

Обозначив  $AB$  через  $a$ ,  $BC$  — через  $2a$ , имеем:  $2 \cdot 2a + 2a = 24$  м; отсюда  $a = 4$  м;  $2a = 8$  м.

**107.** Если  $AC$  в точке  $F$  делится в отношении 1:3, то  $AF = \frac{1}{4}AC$ ; но  $AO = \frac{1}{2}AC$  (диагонали параллелограмма взаимно делятся пополам), следовательно,  $AO$  в точке  $F$  делится пополам, и, значит, тр-к  $ABO$  — равнобедренный (высота  $BF$  делит основание пополам), т. е.  $AB = BO = \frac{BD}{2}$ , откуда  $BD = 2AB$ . Если  $OE = 2$  м, то  $CD = 4$  м.  $\left( OE = GD = \frac{CD}{2} \right)$ .

Так как  $AB = CD = 4$  м, то  $BD = 8$  м.

**108.** Диагонали ромба взаимно перпендикулярны. Следовательно, тр-к  $AOB$  — прямоугольный, и  $\angle ABO + \angle BAO = d$ .

Так как  $\angle ABO = \angle BAO = \frac{3}{17}d$ , то, разрешая эти два ур-ия совместно, получим  $\angle ABO = \frac{10}{17}d$ ,  $\angle BAO = \frac{7}{17}d$ .

А так как углы ромба диагоналями делятся пополам, то  $\angle ABC = 2 \cdot \frac{10}{17}d = \frac{20}{17}d$  и  $\angle BAD = 2 \cdot \frac{7}{17}d = \frac{14}{17}d$ .

**109.** Углы соответственно равны (зад. 108)

$$2 \cdot \frac{5}{9}d = \frac{10}{9}d; \quad 2 \cdot \frac{4}{9}d = \frac{8}{9}d.$$

**110.** Диагональ  $BD$  равна  $AB$ , ибо высота  $BE$  делит основание  $AD$  тр-ка  $ABD$  пополам. Так как  $AD = AB = BD$ , то тр-к  $ABD$  равносторонний, и угол  $A = \frac{2}{3}d$ ,  $\angle B = 2d - \frac{2}{3}d = \frac{4}{3}d$ .

**111.** Прямоугольный тр-к  $ADF$  равнобедренный, так как  $\angle A = \frac{d}{2}$ , следовательно, и  $\angle ADF = \frac{d}{2}$ . А потому  $AF = DF$ . Обозначив сторону квадрата через  $a$ , имеем  $AF + FG + GC = AC$  или (заметив, что  $GC = AF = a$ )  $a + a + a = 3a$ , откуда  $a = 1$  м.

**112.** Прямоугольный треугольник  $ADF$  — равнобедренный, ибо  $\angle A = \frac{d}{2}$  (зад. № 62). Следовательно,  $AF = DF$ . Угол  $BDE = \angle A = \frac{d}{2}$ , следовательно, и тр-к  $DBE$  равнобедренный и высота  $BK$  делит основание  $DE$  пополам, т. е.  $DK = \frac{DE}{2}$ .

Обозначим (помня, что отношение сторон прямоугольника 5:2) стороны прямоугольника  $DE$  через  $5x$ ,  $DF$  через  $2x$ . Тогда

$$AL = AF + FL = DF + DK = DF + \frac{DE}{2} \text{ или } AL = 2x + \frac{5x}{2} = \frac{9}{2}x.$$

$$\text{Но } AL = \frac{AC}{2} = \frac{45}{2} \text{ см; следовательно, } \frac{9}{2}x = \frac{45}{2} \text{ см, откуда } x = 5 \text{ см.}$$

Стороны прямоугольника  $5x = 5 \cdot 5 = 25$  см,  $2x = 2 \cdot 5 = 10$  см.

**113.** Четыреугольник  $DBEO$  — ромб, ибо  $DB$  равно  $BE$ . Следовательно,  $BK = KO$  (диагонали параллелограмма взаимно делятся пополам).  $KO$  и  $OL$  равны между собой (из равенства тр-ков  $ODE$  и  $OFG$  следует, что и высоты  $KO$  и  $OL$  равны). Следовательно, высота тр-ка  $ABC$  делится на 3 равных отрезка

$$BK = KO = OL = \frac{9}{3} = 3 \text{ дм; } KL = KO + OL = 6 \text{ дм или } 0,6 \text{ м.}$$

Так как  $EF$  параллельна  $AD$ , а  $DE$  параллельна  $AF$ , то 4-угольник  $ADEF$  — параллелограмм и  $DE = AF$ ; точно так же и



$DE=GC$ . Но  $DE$  равно и  $FG$ . Следовательно, прямая  $AC$  делится на 3 равных отрезка  $AF=FG=GC=\frac{AC}{3}=\frac{2,4}{3}=0,8$  м. Следовательно,  $DE=0,8$  м.

**114.** Примечание. В квадрат прямоугольник может быть вписан только симметрично, вследствие того, что *равные* диагонали ( $FG$  и  $EH$ ) образуют *равные* углы со сторонами квадрата, а потому и углы (напр.  $BFE$  и  $BEF$ ), образуемые стороной прямоугольника со сторонами квадрата, равны между собой; следовательно, и ( $EB=BE$ ) отрезки на сторонах квадрата равны между собой.

Обозначим  $EF$  через  $x$ ,  $EG=2x$ . Из равнобедренного тр-ка  $AЕК$  имеем:  $AK=EK=\frac{EG}{2}=x$ . Диагональ  $AC$  делится на три равных отрезка  $AK=KL=LC=\frac{AC}{3}=\frac{12}{3}=4$  м. Следовательно,  $EF=x=4$  м,  $EG=2x=8$  м.

**115.** Периметр трапеции  $P=AB+BC+CD+AD$ . Но  $CD=BE$ ,  $BC=ED$ ,  $AD=AE+ED$ . Следовательно, периметр переписется так:  $P=AB+ED+BE+AE+ED$ . Заметив, что периметр тр-ка  $ACE$   $AB+BE+AE=1$  м,  $ED=3$  дм, перепишем:

$$P=AB+BE+AE+2ED=10 \text{ дм} + 2 \cdot 3 \text{ дм} = 16 \text{ дм}.$$

**116.** Проведя через точки деления параллельные стороне  $BD$  линии  $AN$ ,  $EO$ ,  $FP$  и т. д., получим равные тр-ки  $ANE$ ,  $EOF$  и т. д., т. к. по условию  $AE=EF=FG$  и т. д.,  $\angle EAN=\angle FEO=\angle GFP$  и т. д., как соответственные, а  $\angle AEN=\angle EFO$  и т. д. Но  $NL=AB$ ,  $OM=EL$  и т. д. (как отрезки параллельных между параллельными). Значит, параллельные  $EL$ ,  $FM$  и т. д. возрастают равномерно на одну и ту же длину  $EN$ .

Обозначим отрезок  $EN$  через  $a$ . Тогда  $EL$  больше  $AB$  на  $a$ ,  $FM$  на  $2a$  и т. д., а  $CD$  больше  $AB$  на  $6a$ . Так как разность оснований  $28-10=18$  см, то  $EN=a=\frac{18}{6}=3$  см. Следовательно, искомые прямые равны:  $10+3=13$  см;  $13+3=16$  см;  $16+3=19$  см;  $19+3=22$  см;  $22+3=25$  см.

**117.** Угол  $BCA=CAD=\frac{2}{7}d$ ; следовательно,

$$\angle BCD=d+\frac{2}{7}d=\frac{9}{7}d; \angle D=2d-\frac{9}{7}d=\frac{5}{7}d.$$

Угол  $BAC=BCA$  (тр-к  $ABC$  равнобедренный)  $=\frac{2}{7}d$ . Следовательно,  $AC$ —биссектриса угла  $A$ , который равен  $2 \cdot \frac{2}{7}d=\frac{4}{7}d$ ; а угол  $B=2d-\frac{4}{7}d=\frac{10}{7}d$ .



**118.** Из прямоугольного тр-ка (черт. зад. 117)  $ACD$  имеем (зад. № 67),  $CD = \frac{AD}{2}$ ,  $\angle CAD = d - \frac{2}{3}d = \frac{1}{3}d$ ; следовательно,

$\angle BAD = \frac{2}{3}d$ , т.е.  $\angle BAD = \angle CDA$ , значит трапеция равнобедренная и  $AB = CD$ . Тр-к  $ABC$  равнобедренный, так как  $\angle BAC = \frac{1}{3}d$  и  $\angle BCA = \angle CAD$  (как накрест-лежащие)  $= \frac{1}{3}d$ , следовательно и  $BC = AB$ . Обозначив сторону  $CD$  через  $x$  и  $AD$  через  $2x$ , получим  $AB + BC + CD + AD = 2$  м или  $5x = 2$  м, откуда  $x = 0,4$  м,  $AD = 2x = 0,8$  м.

**119.** При отношении углов  $2:5:6:3$  трапеция невозможна, ибо  $A + B$  должно быть равно  $C + D$ , но  $2 + 5 \neq 6 + 3$ . (Показанный в тексте чертеж—условный).

**120.** Если обозначим основания через  $7x$  и  $3x$ , то имеем уравнение  $7x - 3x = 3,2$  м, откуда  $x = 0,8$  м.

Средняя линия трапеции равна  $\frac{7x + 3x}{2} = 5x = 5 \cdot 0,8 = 4$  м.

**121.** Средняя линия трапеции равна  $\frac{2,4 + 3}{2} = 2,7$  м. Прямые, меньшие этой величины, ближе к меньшему основанию, большие—к большему.

Прямая, параллельная основаниям и равная  $2,8$  м, ближе, очевидно, к большему основанию.

**122.** Если средняя линия трапеции  $12$  см, то сумма оснований равна  $2 \cdot 12 = 24$  см. Отрезок  $AG = AD - GD = AD - BC = 1$  см. Обозначив основания через  $x$  и  $y$ , имеем 2 ур-ия:  $x + y = 24$ ,  $x - y = 1$ . Решая эти ур-ия, получим  $x = 12,5$  см,  $y = 11,5$  см.

**123.** Проведя среднюю линию, видим, что получился параллелограмм  $EFDG$ , в котором  $EF = GD = 2,5$  м. Следовательно, сумма оснований равна  $2,5 \cdot 2 = 5$  м. Большее основание равно  $AG + GD = 0,5 + 2,5 = 3$  м. Меньшее основание  $5 - 3 = 2$  м.

**124.** Пусть основания трапеции  $a$  и  $b$ , а боковая сторона  $c$ . Если боковая сторона равна средней линии трапеции, то  $c = \frac{a+b}{2}$ , а периметр равен:  $a + b + 2c = 2(a + b) = 24$  м. Следовательно, искомая  $c = \frac{a+b}{2} = 6$  м.

**125.** В равнобедренной трапеции углы, прилежащие каждому основанию, равны между собою. Следовательно, зная сумму противоположных углов:  $x + y = 2d$  и разность их  $x - y = \frac{8}{13}d$ , находим эти углы (решая систему уравнений)  $x = \frac{17}{13}d$ ,  $y = \frac{9}{13}d$ . Доказать, что углы, прилежащие основанию равнобедренной тра-



пеции, равны между собою, можно, опустив из вершины верхнего основания перпендикуляры на нижнее, а из равенства полученных прямоугольных треугольников вытекает и равенство искомых углов.

**126.**  $\angle BAC = \angle BCA$  (черт. зад. № 117),  $\angle BCA = \angle CAD$  (накрест-лежащие углы).  $\angle B = \angle BCD = d + \angle BCA$ . Обозначив  $\angle BCA$  через  $x$ , из тр-ка  $ABC$  имеем:

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = x + x + d + x = 2d.$$

Отсюда  $x = \frac{d}{3}$ . Следовательно,  $\angle A = 2x = \frac{2}{3}d$ ,  $\angle B = d + x = \frac{4}{3}d$ .

**127.** Периметр трапеции (черт. зад. № 117)  $2.12 = 24$  дм. Разность периметров треугольников равна

$$(AD + CD + AC) - (AB + BC + AC) = 6 \text{ дм.}$$

Но  $AB = CD$ , значит,  $AD - BC = 6$  дм.

Если через  $x$  и  $y$  обозначим основания, то  $x + y = 24$ ,  $x - y = 6$ , откуда  $x = 15$  дм,  $y = 9$  дм.

**128.** 1) См. зад. 126.  $AB = BC = CD$ . Обозначим эти стороны через  $x$ ; тогда  $3x + 1,5 \text{ м.} = 4,5 \text{ м.}$  Отсюда  $x = 1 \text{ м.}$

2)  $AD = CD$ , так как углы  $BCA$  и  $CAD$  равны, как накрест-лежащие,  $AC$  — биссектриса, т.е.  $\angle ACD = \angle BCA$ , а потому тр-к  $ACD$  равнобедренный. Обозначим  $AB = CD = AD$  через  $x$ ,  $BC$  через  $y$ . Тогда периметр трапеции  $3x + y = a + x$ , или  $2x + y = a$  (1).  $BC + AD = x + y = 2b$  (2).

Решив эти ур-ия, получим  $y = (4b - a) \text{ м.}$

**129.** Опустив из вершины  $C$  второго тупого угла высоту  $CE$  на большее основание, видим, что и отрезок  $ED = 6 \text{ см.}$  Следовательно,  $BC = EF = FD - ED = 30 - 6 = 24 \text{ см.}$ ;  $AD = AF + FD = 6 + 30 = 36 \text{ см.}$

**130.** Сумма оснований (черт. зад. 129)  $BC + AD = 2.2,75 = 5,5 \text{ м.}$  Разность оснований равна  $2.1,25 = 2,5 \text{ м.}$  Обозначив большее основание через  $x$ , меньшее — через  $y$ , имеем систему ур-ий:  $x + y = 5,5$ ;  $x - y = 2,5$ .

Решив ур-ия, найдем:  $x = 4 \text{ м.}$ ,  $y = 1,5 \text{ м.}$

**131.** Опустив высоту  $CE$  (черт. зад. № 129), получим прямоугольный тр-к с углом в  $\frac{2}{3}d$ . Следовательно (зад. 67):

$$ED = \frac{CD}{2} = 0,5 \text{ м.} \text{ Тогда } BC = AD - 2ED = 2,7 - 2.0,5 = 1,7 \text{ м.}$$

**132.** Обозначим большее основание (черт. зад. № 129) через  $x$  меньшее—через  $y$ . Тогда сумма оснований  $x+y=2m$ .

Из прямоугольного тр-ка  $CDE$  (равнобедренного, ибо угол  $D = \frac{d}{2}$ , а потому и  $\angle ECD = \frac{d}{2}$ ) имеем:  $ED = EC = h$ .

Следовательно (зад. 129):  $AD - BC = 2ED = 2h$  или  $x - y = 2h$ . Решая систему ур-ий:  $x + y = 2m$ ;  $x - y = 2h$ , получим

$$x = m + h, \quad y = m - h.$$

**133.** Проведя  $CG$  перпендикулярно  $AD$  и  $EH$  параллельно  $AD$ , найдем:  $BF = BH + HF$ . Но  $BH = \frac{BA}{2} = \frac{CG}{2} = \frac{GD}{2}$  (так как

прямоугольный тр-к  $CGD$  — равнобедренный: угол  $D = \frac{d}{2}$ ). Пря-

моугольный тр-к  $HEF$  равнобедренный ( $AD \perp BF$  и  $FE \perp CD$ , следовательно,  $\angle BFE = \angle CDG = \frac{d}{2}$ ), т.-е.  $HF = HE$ . Опустив пер-

пендикуляр  $EK$  на  $AD$ , получим  $HE = AK$  и  $GK = KD$  (так как  $GED$  — равнобедренный прямоугольный тр-к) или  $KD = \frac{GD}{2}$ . Сле-

довательно,  $BF = BH + HF = \frac{GD}{2} + HE = KD + AK = AD = a$ .

**134.** Известно, что  $KF = \frac{AD}{2}$  и  $EK = \frac{BC}{2}$ .

Следовательно,  $KF - EK = \frac{AD - BC}{2} = 2 \text{ дм}$  или  $AD - BC = 4 \text{ дм}$ .

Сумма оснований равна удвоенной средней линии, т. е.  $AD + BC = 2 \cdot 8 = 16 \text{ дм}$ . По сумме и разности оснований находим

$$AD = 10 \text{ дм} (1 \text{ м}), \quad BC = 6 \text{ дм}.$$

**135.** Обозначим отрезки  $EG = GH = HF = x$ . Следовательно,  $GF = GH + HF = 2x$ ; с другой стороны  $GF = \frac{AD}{2}$ ,  $EG = \frac{BC}{2}$ .

Следовательно,  $AD = 2GF = 4x$ ,  $BC = 2EG = 2x$ .

$$\text{Отношение } \frac{BC}{AD} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}.$$

**136.** Так как стороны образовавшегося тр-ка равны половине соответственных сторон данного, т.-е.  $DE = \frac{AC}{2}$ ,  $DF = \frac{BC}{2}$ ,

$EF = \frac{AB}{2}$ , то периметр тр-ка  $DEF$  тоже равен половине пери-



метра тр-ка  $ABC$ . Следовательно, периметр данного тр-ка  $ABC$  равен  $2,5,2 = 10,4$  м. Обозначив стороны его через  $3x$ ,  $4x$ ,  $6x$ , составим уравнение  $3x + 4x + 6x = 13x = 10,4$  м, отсюда  $x = \frac{10,4}{13}$ ;

$$3x = \frac{3 \cdot 10,4}{13} = 2,4 \text{ м}; \quad 4x = 4 \cdot \frac{10,4}{13} = 3,2 \text{ м}; \quad 6x = 6 \cdot \frac{10,4}{13} = 4,8 \text{ м}.$$

**137.** Положим  $BD = 1$  м,  $AC = 0,8$  м. Из тр-ка  $ABC$ , у которого середины сторон  $E$  и  $F$  соединены прямой  $EF$ , имеем:

$$EF = \frac{AC}{2} = 0,4 \text{ м.}$$

Таким же образом и  $GH$  из тр-ка  $ACD$  равна

$$0,4 \text{ м.}$$

Из тр-ков  $BCD$  и  $ABD$  подобным же образом получим  $FH = \frac{BD}{2}$  и  $EG = \frac{BD}{2} = 0,5$  м. Таким образом, в полученном 4-угольнике  $EFHG$  противоположные стороны равны, значит, получится параллелограмм со сторонами  $0,4$  м и  $0,5$  м или  $4$  дм и  $5$  дм. Так как диагонали данного 4-угольника  $ABCD$  параллельны сторонам полученного параллелограмма  $EFHG$ , то угол  $FEG$  равен углу  $CKD = \frac{5}{8}d$ , а угол  $EFH = \angle AKD = 2d - \frac{5}{8}d = \frac{11}{8}d$ .

**Окружность. Измерение углов с помощью дуг. Описанная и вписанная окружность. Относительное положение окружностей.**

**138.** 1) Наибольшее расстояние  $AC = AO + OC = 15 + 10 = 25$  см; наименьшее —  $AB = AO - OB = 15 - 10 = 5$  см.

2) Наибольшее расстояние  $AC = AO + OC = 3 + 10 = 13$  см; наименьшее —  $AB = OB - OA = 10 - 3 = 7$  см.

**139.** Как и в зад. 138, могут быть два случая (черт. зад. № 138):

6 1) Точка лежит вне круга.  $AO - OB = a$ ;  $AO + OC = b$ . Вычтя почленно первое равенство из второго и заметив при этом, что  $OB = OC = r$ , получим:  $2r = b - a$ ; откуда  $r = \frac{b - a}{2}$ .

2) Точка лежит внутри круга (черт. б).

$$OB - OA = a; \quad OA + OC = b.$$

Складывая оба равенства почленно и имея в виду, что  $OB = OC = r$ , получим:  $2r = a + b$ ; откуда  $r = \frac{a + b}{2}$ .

**140.** Данные хорды  $AC$  и  $BC$ ;  $OD = 10$  см,  $OE = 6$  см. Угол  $ACB$  прямой, а потому опирается на диаметр  $AB$ . Прямоугольные тр-ки  $AOD$  и  $OEB$  равны между собою, так как гипотенузы  $AO$  и  $OB$  равны, как радиусы; острые углы  $AOD$  и  $OBE$  равны, как соответственные. Следовательно,  $AD = OE$ . Но  $AD = DC$  (радиус, перпендикулярный хорде, делит хорду пополам); следовательно,  $OE = \frac{AC}{2}$  или  $AC = 2 \cdot OE = 2 \cdot 6 = 12$  см.

Из тех же равных прямоугольных треугольников следует, что и  $OD = EB = \frac{BC}{2}$ ; следовательно,  $BC = 2OD = 2 \cdot 10 = 20$  см.

Задача решается и так:  $OE = \frac{AC}{2}$  и  $OD = \frac{BC}{2}$ , так как  $OE$  и  $BC$  линии, соединяющие середины сторон тр-ка  $ABC$ .

**141.** Перпендикуляры  $AC$  и  $BD$  к касательной параллельны между собой, а потому  $ABDC$  — трапеция. Радиус  $OE$ , проведенный в точку  $E$  касания, перпендикулярен к касательной  $CD$ , а потому параллелен прямым  $AC$  и  $BD$ ; а так как он проведен и через середину боковой стороны ( $O$  — середина диаметра  $AB$ ) трапеции, то является средней линией. Следовательно,

$$R = OE = \frac{AC + BD}{2} = \frac{1,6 + 0,6}{2} = 1,1 \text{ м};$$

диаметр круга  $2R = 2 \cdot 1,1 = 2,2$  м.

$$\mathbf{142.} \quad 1) \frac{d}{5} = \frac{90^\circ}{5} = 18^\circ; \quad 2) 0,25d = 0,25 \cdot 90^\circ = 22,5^\circ = 22^\circ 30';$$

$$3) \frac{1}{32}d = \frac{90^\circ}{32} = 2^\circ 48' 45''; \quad 4) \frac{5}{6}d = \frac{5}{6} \cdot 90^\circ = 75^\circ;$$

$$5) \frac{17}{24}d = \frac{17}{24} \cdot 90^\circ = 63^\circ 45'; \quad 6) \frac{32}{21} \cdot 90^\circ = 137^\circ 8' 34 \frac{2}{7}.$$

$$\mathbf{143.} \quad 1) 360^\circ \cdot \frac{1}{72} = 5^\circ; \quad 2) \frac{1}{81} \cdot 360^\circ = 4^\circ 26' 40''; \quad 3) 0,001 \cdot 360^\circ = 0,36^\circ = 21' 36''; \quad 4) \frac{1}{14} \cdot 360^\circ = 25^\circ 42' 51 \frac{3}{7}''; \quad 5) \frac{5}{11} \cdot 360^\circ = 163^\circ 38' 10 \frac{10}{11}''.$$

$$\mathbf{144.} \quad 1) \frac{15^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{24}; \quad 2) \frac{22,5^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{16}; \quad 3) \frac{108^\circ}{360^\circ} = \frac{3}{10};$$

$$4) \frac{24'}{360^\circ} = \frac{24'}{360 \cdot 60'} = \frac{1}{900}; \quad 5) \frac{18''}{360^\circ} = \frac{18''}{360 \cdot 60 \cdot 60''} = \frac{1}{72000};$$

$$6) \frac{18^\circ 45'}{360^\circ} = \frac{1125'}{21600'} = \frac{5}{96}; \quad 7) \frac{2^\circ 30''}{360^\circ} = \frac{2 \cdot \frac{1^\circ}{2} \cdot 2,60}{360^\circ} = \frac{241}{120 \cdot 360} = \frac{241}{43200}$$



$$\text{или } \frac{7230''}{360.60.60''} = \frac{241}{43200}; \quad 8) \frac{10'40''}{360''} = \frac{640''}{360.60.60''} = \frac{1}{2025};$$

$$9) \frac{36^{\circ}12'17''}{360''} = \frac{130337''}{360.60.60''} = \frac{130337}{1296000}.$$

4 **145.** 1) Угол между стрелками для 1-го часа равен  $\frac{1}{12} \cdot 360^{\circ} = 30^{\circ}$ , а в 5 ч. равен  $30^{\circ} \cdot 5 = 150^{\circ}$ .

2) Минутная стрелка сделала от начала  $\frac{25}{60}$  окружности; часовая же  $3 \frac{25}{60} \cdot \frac{1}{12}$  окружности. Следовательно, угол между ними равен  $\frac{25}{60} - 3 \frac{25}{60} \cdot \frac{1}{12} = \frac{19}{144}$  окружности. Угол между стрелками равен  $\frac{19}{144} \cdot 360^{\circ} = 47^{\circ}30'$ .

3) Подобным же рассуждением найдем:

$$\left( \frac{50}{60} - 4 \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{12} \right) 360^{\circ} = 155^{\circ}.$$

**146.** 1)  $90^{\circ} - 70^{\circ} = 20^{\circ}$ ; 2)  $90^{\circ} - 34^{\circ}23' = 55^{\circ}37'$ ; 3)  $90^{\circ} - 22^{\circ}42'38'' = 67^{\circ}17'22''$ .

**147** Сумма смежных углов равна  $2d = 180^{\circ}$ .

1)  $180^{\circ} - 137^{\circ} = 43^{\circ}$ ; 2)  $180^{\circ} - 26^{\circ}37' = 153^{\circ}23'$ ;

3)  $180^{\circ} - 54^{\circ}0'17'' = 125^{\circ}59'43''$ .

**148.** Сумма всех углов около точки равна  $4d = 360^{\circ}$ . Следовательно, каждый угол равен  $\frac{1}{48} \cdot 360^{\circ} = 7^{\circ}30'$ .

**149.** Углы с взаимно-параллельными сторонами либо равны между собою, либо равны в сумме  $2d = 180^{\circ}$ . Обозначив острый угол через  $x$ , а тупой через  $x + 12^{\circ}18'54''$ , получим равенство:  $x + (x + 12^{\circ}18'54'') = 180^{\circ}$ . Решив это ур-е, получим:  $x = 83^{\circ}50'33''$ .

**150.** Сумма всех углов тр-ка равна  $2d = 180^{\circ}$ .

Искомый угол равен:  $180^{\circ} - (110^{\circ}23'52'' + 24^{\circ}36'41'') = 44^{\circ}59'27''$ .

**151.** Сумма острых углов прямоугольного тр-ка равна  $d = 90^{\circ}$ . Искомый угол равен:  $90^{\circ} - 58^{\circ}20'32'' = 31^{\circ}39'28''$ .

**152.** Сумма всех углов тр-ка равна  $2d = 180^{\circ}$ . Углы при основании равнобедренного тр-ка равны между собой. Искомый угол равен  $\frac{180^{\circ} - 105^{\circ}0'27''}{2} = 37^{\circ}29'46,5''$ .

**153.** Искомый угол (зад. 152) равен  $180^{\circ} - 2.70^{\circ}43'8'' = 38^{\circ}33'44''$ .

**154.** Углы равны:  $\frac{12}{12+9+11} \cdot 180^{\circ} = \frac{12}{32} \cdot 180^{\circ} = 67^{\circ}30'$ ;

$\frac{9}{12+9+11} \cdot 180^{\circ} = 50^{\circ}37'30''$  и  $\frac{11}{12+9+11} \cdot 180^{\circ} = 61^{\circ}52'30''$ .

**155.** В 4-угольнике (зад. 81) сумма всех углов равна  $4d = 360^\circ$ . Искомые углы равны:

$$\frac{4}{4+7+6+10} \cdot 360^\circ = \frac{4}{27} \cdot 360^\circ = 53^\circ 20'; \quad \frac{7}{27} \cdot 360^\circ = 93^\circ 20';$$

$$\frac{6}{27} \cdot 360^\circ = 80^\circ; \quad \frac{10}{27} \cdot 360^\circ = 133^\circ 20'.$$

**156.** Сумма всех углов  $n$ -угольника равна  $2dn - 4d$  или  $2d(n-2) = 180^\circ(n-2)$ . Каждый угол равноугольного  $n$ -угольника равен  $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ . Подставляя в эту формулу вместо  $n$  последовательно: 16, 50, 28, получим:

$$\frac{180^\circ(16-2)}{16} = 157^\circ 30'; \quad \frac{180^\circ(50-2)}{50} = 172^\circ 48';$$

$$\frac{180^\circ(28-2)}{28} = 167^\circ 8' 34 \frac{2}{7}''.$$

**157.** Положим углы  $A$  и  $C$  равны по  $45^\circ$ . Высота  $BD$  делит основание  $AC$  тр-ка  $ABC$  (в данном случае прямоугольного, так как угол  $B = 90^\circ$ ) на равные части  $AD = DC$ .

В прямоугольном тр-ке  $ABD$  угол  $ABD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ .

Следовательно, тр-к  $ABD$  равнобедренный, т.е.,  $BD = AD = \frac{AC}{2}$ .

По условию,  $AC - BD = 26$  см или, заменив  $BD$  через  $\frac{AC}{2}$ ,

$$\text{имеем: } AC - \frac{AC}{2} = 26 \text{ см; откуда } AC = 52 \text{ см.}$$

**158.** Касательные, проведенные из одной точки, равны между собою. Рассматривая тр-к  $ABC$ , видим, что углы  $ABC$  и  $ACB$  равны, так как измеряются половиной дуги  $BC$ ; следовательно, и  $AB = BC$ . Тр-к  $ABC$  равносторонний, так как  $\angle BAC = 60^\circ$ , а углы при основании тоже равны, следовательно искомая прямая  $BC = AB$ ; так как  $AB = AC = \frac{1}{2} \text{ м}$ , то и  $BC = \frac{1}{2} \text{ м}$  или 5 дм.

**159.** Хорда  $AB$  стягивает дугу в  $90^\circ$ , т.е.  $\angle AOB$  прямой, а тр-к  $AOB$  равнобедренный и каждый угол при основании равен  $45^\circ$ . Прямоугольный тр-к  $AOD$  тоже равнобедренный, так как острый его угол  $OAD = 45^\circ$ . Следовательно,

$$OD = AD = \frac{AB}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ см}$$



6 160. Пусть хорда  $AB$  стягивает дугу  $ACB = 120^\circ$ . Соединив центр окружности  $O$  с концами  $A$  и  $B$  хорды  $AB$ , получим равнобедренный тр-к  $AOB$  с углом  $AOB = 120^\circ$ . Опустим высоту  $OD$ . Угол  $AOB$  разделится пополам, т.е.  $\angle AOD = \angle BOD = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ .

В прямоугольном тр-ке  $AOD$  гипотенуза  $AO$  (радиус) = 1,4 м. Согласно зад. 67,  $OD = \frac{AO}{2} = \frac{1,4}{2} = 0,7$  м.

7 161. Пусть  $AC$  и  $CB$  касательные в точках  $A$  и  $B$  — концах сторон угла  $AOB$ . Углы  $OAC$  и  $OBC$  прямые (касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания). Сумма углов 4-угольника (зад. 81) равна  $4d$ .

Следовательно, угол  $ACB = 4d - (d + d + 102^\circ 0' 37'') = 77^\circ 59' 23''$ .

9 162. Треугольник  $AOB$  (черт. зад. № 160) равнобедренный ( $AO = BO = r$ ) с углами  $OAB$  и  $OBA$ , равными каждый  $37^\circ 23'$ .

Следовательно,  $\angle AOB = 2d - (\angle OAB + \angle OBA) = 180^\circ - 2 \cdot 37^\circ 23' = 105^\circ 14'$ .

10 163. Из равнобедренного тр-ка  $AOB$  (черт. зад. № 160), у которого угол при вершине  $O$  равен  $117^\circ 23' 42''$  (центральный угол измеряется соответственной дугой), имеем:

$$\angle BAO = \angle ABO = \frac{180^\circ - 117^\circ 23' 42''}{2} = 31^\circ 18' 9''.$$

А смежный углу  $BAO$  угол  $BAK$  равен  $180^\circ - 31^\circ 18' 9'' = 148^\circ 41' 51''$ .

164. Пусть  $BC$  касательная, пересекающаяся в точке  $C$  с продолжением радиуса  $OA$ . Соединяя центр круга  $O$  с точкой касания  $B$ , получаем прямоугольный треугольник  $OBC$  ( $OB \perp BC$ , как радиус, проведенный к касательной в точку касания). В прямоугольном тр-ке  $OBC$  угол  $COB$  равен  $73^\circ 27' 43''$  (центральный угол измеряется соответственной дугой). Искомый угол  $BCO$  равен  $90^\circ - \angle BOC = 90^\circ - 73^\circ 27' 43'' = 16^\circ 32' 17''$  (т. к. сумма острых углов прямоугольного тр-ка равна  $90^\circ$ ).

165. Угол  $ACB$  — вписанный и измеряется  $\frac{\widehat{AB}}{2}$ .

а. 1)  $\frac{70^\circ 23'}{2} = 35^\circ 11' 30''$ ; 2)  $\frac{117^\circ 28'}{2} = 58^\circ 44''$ ;

3)  $\frac{315^\circ 40' 24''}{2} = 157^\circ 50' 12''$ .

б. Дуга  $ABD$  равна разности  $360^\circ - \sphericalangle ABC$ .

$$1) \frac{360^\circ - 51^\circ 20'}{2} = 154^\circ 20'; \quad 2) \frac{360^\circ - 104^\circ 26'}{2} = 127^\circ 47';$$

$$3) \frac{360^\circ - 214^\circ}{2} = 73^\circ.$$

**166.** Вписанный угол  $CBD$  измеряется  $\frac{\sphericalangle CED}{2} =$

$$= \frac{\sphericalangle BDC - \sphericalangle BD}{2} = \frac{213^\circ 41' - 43^\circ}{2} = \frac{170^\circ 41'}{2} = 85^\circ 20' 30'',$$

а смежный углу  $CBD$  — угол  $ABD$  равен  $180^\circ - 85^\circ 20' 30'' = 94^\circ 39' 30''$ .

**167.** Если дуга  $ACB$  составляет  $\frac{17}{32}$  всей окружности, то угол  $ACB$  опирается на дугу  $ADB$ , равную  $1 - \frac{17}{32} = \frac{15}{32}$  окружности. А потому угол  $ACB$ , измеряемый половиной дуги  $ADB$ , равен  $360^\circ \cdot \frac{15}{32} \cdot \frac{1}{2} = 84^\circ 22' 30''$ .

**168.** Если (черт. зад. № 167) угол  $ACB = 37^\circ 21' 43''$ , то дуга  $ADB$  равна  $2 \cdot 37^\circ 21' 43'' = 74^\circ 43' 26''$ , а  $\sphericalangle ACB = 360^\circ - 74^\circ 43' 26'' = 285^\circ 16' 34''$ .

**169.** Угол зрения равен углу между крайними лучами, входящими в глаз, т.е. углу  $ACB$ . Все углы, образующиеся от соединения точек дуги  $ACB$  с концами ее, измеряются половиной дуги  $ABD$ . Следовательно, эти углы равны

$$\frac{360^\circ - 84^\circ 52' 18''}{2} = 137^\circ 33' 51''.$$

**170.** Пусть  $\frac{\sphericalangle ABC}{\sphericalangle ADC} = \frac{5}{11}$ . Все углы, вмещающие дугу  $ABC$ ,

измеряются половиной дуги  $ADC$ , т.е. равны  $\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{5+11} \cdot 360^\circ =$

$= 123^\circ 45'$ . Углы же, вмещающие дугу  $ADC$ , измеряются половиной дуги  $ABC$ , т.е. равны  $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5+11} \cdot 360^\circ = 56^\circ 15'$ . Этот же ре-

зультат получим, вычтя из  $180^\circ$  угол  $123^\circ 45'$ , так как сумма обоих углов измеряется половиной окружности, т.е.  $180^\circ$ .

**171.** 1-й случай. Хорды расположены по обе стороны от центра. Вписанный угол  $BAC$  измеряется половиной дуги  $BDC$ , равной  $360^\circ - (\sphericalangle AB + \sphericalangle AC)$ , т.е. равен

$$\frac{360^\circ - (110^\circ 23' + 38^\circ)}{2} = 105^\circ 48' 30''.$$



2-й случай. Хорды расположены по одну сторону центра. Вписанный угол  $BAC$  измеряется половиной дуги  $BC$ , т.е. равен  $\frac{\angle AB + \angle AC}{2} = \frac{110^\circ 23' - 38^\circ}{2} = 36^\circ 11' 30''$ .

**172.** Угол  $BAC$  измеряется половиной дуги  $BC$ . Дуга  $AB = 130^\circ$ ; следовательно, дуга  $ACB$  равна  $360^\circ - \angle AB = 360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$ ; дуга же  $BC$  равна  $\frac{15}{31 + 15} \cdot \angle ABC$  или  $\frac{15}{46} \cdot 230^\circ = 75^\circ$ . А потому искомый угол равен  $\frac{75^\circ}{2} = 37^\circ 30'$ . 117

**173.** Дуга  $BC$  измеряется двойной величиной угла  $BAC$ , опирающегося на нее, т.е.  $2 \cdot 72^\circ 30' = 145^\circ$ . Следовательно, сумма дуг  $AB$  и  $AC$  равна  $360^\circ - 145^\circ = 215^\circ$ . А потому искомые дуги равны:  $\angle AB = \frac{19}{19 + 24} \cdot 215^\circ = 95^\circ$ ,  $\angle AC = 215^\circ - 95^\circ = 120^\circ$ . 118

**174.** Пусть  $\angle AB : \angle BC : \angle AC = 7 : 11 : 6$ . Вписанный угол  $B$  измеряется половиной дуги  $AC$ , равной  $\frac{6}{7 + 11 + 6} \cdot 360^\circ = 90^\circ$ , т.е. равен  $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ . Угол  $A$  равен  $\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{7 + 11 + 6} \cdot 360^\circ = 82^\circ 30'$ , а  $\angle C = 180^\circ - (45^\circ + 82^\circ 30') = 52^\circ 30'$  или  $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{24} \cdot 360^\circ = 52^\circ 30'$ . 119

**175.** Пусть  $BC$  — перпендикуляр к хорде  $AB$ . Угол  $ABC$  — вписанный прямой и опирается поэтому на полуокружность  $AC$ . Так как отношение  $\frac{\angle BC}{\angle AC} = \frac{2}{5}$ , то, обозначив  $\angle BC$  через  $2x$ , а полуокружность  $AC$  через  $5x$ , найдем что  $5x = 180^\circ$  или  $x = 36^\circ$ ;  $\angle AB = 180^\circ - \angle BC$  или  $\angle AB = 5x - 2x = 3x = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$ . 120

**176.** Пусть медиана  $CD = \frac{AB}{2}$ . Описав окружность из точки  $D$ , как из центра, радиусом, равным медиане, увидим, что  $\angle ACD$ , как опирающийся на диаметр, прямой. 121

**177.** Дуги  $ACB$  и  $ADB$  — дуги окружностей разных радиусов, иначе сумма этих дуг равнялась бы окружности —  $360^\circ$ .

Искомый угол  $CAD$  равен сумме вписанных углов  $CAB$  и  $BAD$ . Но вписанный угол  $CAB$  измеряется половиной дуги  $CB$ , т.е.  $\frac{1}{4} \angle ACB$ , и равен  $\frac{1}{4} \cdot 117^\circ 23' = 29^\circ 20' 45''$ , а вписанный угол  $BAD$  равен  $\frac{1}{4} \cdot 42^\circ 37' = 10^\circ 39' 15''$ . 122

Следовательно,  $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = 29^\circ 20' 45'' + 10^\circ 39' 15'' = 40^\circ$ .



24/ 178. Пусть в трапеции  $ACDB$ , сторона  $AC = CD$ . Вследствие параллельности хорд  $AB$  и  $CD$  дуги  $AC$  и  $BD$ , отсекаемые этими хордами, равны между собою, и, следовательно, дуга  $ACDB$  делится на 3 равные дуги. Так как вписанный угол  $CAB$  равен  $51^{\circ}20'$ , то дуга  $CDB$ , на которую угол опирается, содержит  $2 \cdot 51^{\circ}20'$ , или дуга  $BD = 51^{\circ}20'$ . Вся же дуга  $ACDB$  содержит  $3 \cdot 51^{\circ}20' = 154^{\circ}$ .

179. Пусть  $\smile AC = 60^{\circ}$  и  $\smile BE = 20^{\circ}$ ,  $\angle CFA = \angle DFB$  и  $\angle DGA = \angle EGB$ . Дополним полуокружность до окружности и отложим симметрично дуги  $AK = AC$ ,  $KL = CD$ ,  $LM = DE$ . Вследствие симметричности  $\angle AFK = \angle AFC$ , а по условию  $\angle AFC = \angle DFB$ ; следовательно,  $\angle AFK = \angle DFB$ , т. е.  $KF$  служит продолжением прямой  $FD$ .

25/ Подобным же образом доказывается что  $CL$ ,  $DM$  и  $EL$  прямые. Из чертежа видно, что  $\angle FDG$  составлен хордами  $KD$  и  $MD$  и измеряется, как вписанный, половиной дуги  $KLM$ . Но дуга  $KLM$  равна полуокружности без дуг  $AK$  и  $MB$ , равных  $AC$  и  $BE$  (по симметричности). Итак,

$$\angle FDG = \frac{180^{\circ} - (\smile AC + \smile BE)}{2} = \frac{180^{\circ} - (60^{\circ} + 20^{\circ})}{2} = 50^{\circ}.^1)$$

34/ 180. Острый угол  $CAB$  между касательной  $AC$  и хордой  $AB$  измеряется половиной меньшей дуги  $AB$ , т. е. равен:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3+5} \cdot 360^{\circ} = 67^{\circ}30'.$$

181. Если  $\angle AOB$  обозначим через  $x$ , то  $\angle DAB = x + 54^{\circ}$ . Острый угол  $CAB$  (между касательной и хордой) измеряется половиной дуги  $AB$ , т. е. равен  $\frac{x}{2}$ . Сумма смежных углов т. е.

$$\angle DAB + \angle CAB = 2d \text{ или } (x + 54) + \frac{x}{2} = 180^{\circ}, \text{ откуда } x = 84^{\circ}.$$

35/ 182. Очевидно, углы  $MAB$  и  $NAC$ , измеряющиеся половиной равных дуг  $AB$  и  $AC$ , равны между собою. Дуга  $BAC$  равна  $360^{\circ} - 213^{\circ}42' = 146^{\circ}18'$ . А потому дуги  $AB$  и  $AC$  равны по

$$\frac{146^{\circ}18'}{2} = 73^{\circ}9'. \text{ Искомые же углы равны } \frac{73^{\circ}9'}{2} = 36^{\circ}34'30''$$

36/ 183. Дуга  $ABD$  (между касательной  $DC$  и хордой  $AD$ ), включающая угол  $ADC = 114^{\circ}25'38''$ , вдвое больше угла, т. е. равна  $2 \cdot 114^{\circ}25'38'' = 228^{\circ}51'16''$ . Как видно из чертежа, дуга  $ABD$  состоит из полуокружности  $AB$  и дуги  $BD$ . Следовательно,  $\smile BD = \smile ABD - \smile AB = 228^{\circ}51'16'' - 180^{\circ} = 48^{\circ}51'16''$ .

<sup>1)</sup> Знак  $=$  между величинами угла и дуги является условным, так как угол измеряется соответствующей дугой, а не равен ей.



**184.** Катеты  $AC$  и  $BC$  являются хордами двух окружностей (разных радиусов), имеющих общую касательную  $AB$  (гипотенуза тр-ка).

Если  $\sphericalangle AMC = 100^\circ 47' 24''$ , то острый угол  $BAC$  (т.е. угол тр-ка) между хордой  $AC$  и касательной  $AB$  измеряется половиной дуги  $AMC$ , т.е. равен  $\frac{100^\circ 47' 24''}{2} = 50^\circ 23' 42''$ . Второй острый угол прямоугольного тр-ка равен  $90^\circ - 50^\circ 23' 42'' = 39^\circ 36' 18''$ . Следовательно,  $\sphericalangle CNB$  между касательной  $AB$  и хордой  $CB$  содержит  $2 \cdot 39^\circ 36' 18'' = 79^\circ 12' 36''$ .

**185.** Дуга  $AB$  равна  $\frac{2}{2+3+5+6} \cdot 360^\circ = 45^\circ$ , 31

дуга  $CD = \frac{5}{2+3+5+6} \cdot 360^\circ = 112^\circ 30'$ . Угол  $AMB$ , образованный взаимно-пересекающимися хордами  $AC$  и  $BD$ , измеряется полусуммой дуг, заключенных между ними, т.е.

$$\sphericalangle AMB = \frac{\sphericalangle AB + \sphericalangle CD}{2} = \frac{45^\circ + 112^\circ 30'}{2} = 78^\circ 45'.$$

**186.** Угол  $CMB$  измеряется полусуммой дуг  $BC$  и  $AD$ , заключенных между хордами  $AB$  и  $CD$ . Обозначив дугу  $AD$  через  $x$ , составим равенство  $\sphericalangle CMB = \frac{\sphericalangle AD + \sphericalangle BC}{2}$  или  $73^\circ = \frac{x + 110^\circ}{2}$ , откуда  $x = 36^\circ$ . Дуга  $BD$  равна полуокружности  $ADB$  без дуги  $AD$ , т.е.  $\sphericalangle BD = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$ .

**187.** Из чертежа видно, что  $\sphericalangle AEB$  измеряется полусуммой дуг  $AB$  и  $CD$ , т.е.  $\frac{\sphericalangle AB}{2} + \frac{\sphericalangle CD}{2}$ ; но  $\frac{\sphericalangle AB}{2} = 90^\circ$ .

Следовательно,  $\sphericalangle AEB > 90^\circ$ .

**188.** Тупой угол  $AMD$ , образованный взаимно-пересекающимися хордами  $AB$  и  $CD$ , равен  $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ . Этот угол измеряется полусуммой дуг  $AD$  и  $BC$ . Обозначим дугу  $AD$  через  $x$  тогда дуга  $BC$  выразится через  $x - 20^\circ 54'$ .

$$\text{Следоват., } \sphericalangle AMD = \frac{\sphericalangle AD + \sphericalangle BC}{2} \text{ или } 140^\circ = \frac{x + (x - 20^\circ 54')}{2};$$

откуда  $x = 150^\circ 27'$ .

**189.** Угол  $DMC$  равен полусумме дуг  $AB$  и  $DNC$ ; с другой стороны, он равен углу  $DNC$ , измеряющемуся половиной дуги  $DABC$ , т.е.  $\frac{\sphericalangle AB + \sphericalangle DNC}{2} = \frac{\sphericalangle DABC}{2}$  или  $\sphericalangle AB + \sphericalangle DNC = \sphericalangle DABC$ .

Заменяя  $\sphericalangle DABC$  через  $\sphericalangle DA + \sphericalangle AB + \sphericalangle BC$ , получим:

$$\sphericalangle AB + \sphericalangle DNC = \sphericalangle DA + \sphericalangle AB + \sphericalangle BC \text{ или } \sphericalangle DNC = \sphericalangle DA + \sphericalangle BC.$$

42

42 Иными словами  $\sphericalangle DNC$  равна половине  $\sphericalangle ADNCB$ , дуга же  $ADNCB$  равна  $360^\circ - \sphericalangle AB = 360^\circ - m^\circ$ . Следовательно, искомая дуга равна  $180^\circ - \frac{m^\circ}{2}$ .

43 **190.** Около 4-угольника, сумма противоположных углов которого равна  $2d$ , можно описать окружность. В прямоугольном тр-ке  $ABC$  острый угол  $BCA$  равен  $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ . Дуга  $AB$ , вмещающая  $\sphericalangle BCA = 50^\circ$ , равна  $2 \cdot 50^\circ = 100^\circ$ ; а дуга  $CD$ , вмещающая  $\sphericalangle CAD = 30^\circ$ , равна  $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ .

$$\text{Следовательно, } \sphericalangle CMD = \frac{\sphericalangle AB + \sphericalangle CD}{2} = \frac{100^\circ + 60^\circ}{2} = 80^\circ.$$

**191.** Угол  $AMB$ , как составленный двумя секущими, измеряется полуразностью дуг, заключенных между их сторонами;

$$\text{т.-е. } \sphericalangle AMB = \frac{\sphericalangle CD - \sphericalangle AB}{2}. \text{ Но дуга } CD = \frac{13}{3+2+13+7} \cdot 360^\circ,$$

$$\text{а дуга } AB = \frac{3}{3+2+13+7} \cdot 360^\circ.$$

44 След.,  $\sphericalangle AMB = \frac{1}{2} \left( \frac{13}{3+2+13+7} \cdot 360^\circ - \frac{3}{3+2+13+7} \cdot 360^\circ \right) = 72^\circ.$

**192.** Угол  $NAQ$  измеряется полуразностью дуг  $NQ$  и  $MP$  (угол, образованный секущими), а  $\sphericalangle MBP$  измеряется полусуммой тех же дуг (угол, составленный двумя взаимно-пересекающимися хордами).

Обозначим дуги  $NQ$  и  $MP$  через  $x$  и  $y$ .

$$\text{Тогда } \frac{x-y}{2} = 37^\circ 15'; \quad \frac{x+y}{2} = 112^\circ 45'.$$

Решая систему этих двух ур-ий, получим:  $x = 150^\circ$ ,  $y = 75^\circ 30'$ .

**193.** Как видно из чертежа, угол  $ACB$ , измеряющийся полуразностью дуг  $AB$  и  $ED$ , одна из которых ( $AB$ ) полуокружность, будет всегда меньше  $90^\circ$ .

**194.** Очевидно, любая точка на касательной образует с концами хорды угол, лежащий вне окружности; такой угол измеряется полуразностью дуг  $AB$  и  $EF$  (для точки  $D$ ). Ясно, что при постоянном уменьшаемом ( $\sphericalangle AB$ ) и переменном вычитаемом ( $\sphericalangle FE$ ) та разность будет больше, у которой вычитаемое меньше. Если точка  $D$  переместится в точку  $C$  касания, то вычитаемое окажется равным нулю. Следовательно, наибольший угол зрения и будет из точки касания.



**195.** Угол  $BAD$  равен полуразности дуг между касательной  $AD$  и секущей  $AC$ , т.-е.

$$\angle BAD = \frac{\smile DC - \smile DB}{2} \text{ или}$$

$$\angle BAD = \left( \frac{9}{9+7} \cdot 112^\circ - \frac{7}{9+7} \cdot 112^\circ \right) \frac{1}{2} = 7^\circ.$$

**196.** Угол  $BAD$  измеряется полуразностью дуг  $BD$  и  $BC$ . Обозначив дугу  $BD$  через  $x$ , дугу  $BC$  через  $y$ , получим равенство:

$$\frac{x - y}{2} = 25^\circ. \text{ Откуда } x - y = 50^\circ (1). \text{ Дуга } BC \text{ составляет } \frac{3}{7} \smile CD$$

$$\text{или } \smile CD = \frac{7}{3} \smile BC = \frac{7}{3} y. \text{ Но } \smile DB + \smile BC + \smile CD = 360^\circ,$$

$$\text{т.-е. } x + y + \frac{7}{3} y = 360^\circ (2).$$

Разрешая систему уравнений (1) и (2), получим  $x = 121 \frac{7}{13}^\circ$ ;

$$y = 71 \frac{7}{13}^\circ; \text{ а дуга } BCD = \smile BC + \smile BD = x + y = 193 \frac{1}{13}^\circ.$$

Значит, касательная и секущая не могут быть расположены по черт.  $b$ , так как  $\smile CBD (\smile CB + \smile BD)$  меньше  $180^\circ$ .

А потому секущая и касательная лежат по обе стороны центра.

**197.** Описанный угол  $ACB$  измеряется полуразностью дуг  $ADB$  и  $AEB$ . Дуга  $AEB$  равна  $360^\circ - 200^\circ 30' 42'' = 159^\circ 29' 18''$ .

$$\text{Сл., } \angle ACB = \frac{\smile ADB - \smile AEB}{2} = \frac{200^\circ 30' 42'' - 159^\circ 29' 18''}{2} = 20^\circ 30' 42''. \quad 47$$

**198.** Обозначим искомые дуги через  $x$  и  $y$ .

$$\text{Тогда } \frac{x - y}{2} = 73^\circ 25' 37'',$$

но сумма этих дуг есть окружность, т.-е.  $x + y = 360^\circ$ . Разрешая совместно эти 2 уравнения, получим  $x = 253^\circ 25' 37''$ ;  $y = 106^\circ 34' 23''$ . 48

**199.** Описанный угол равен полуразности дуг,

$$\text{т.-е. } x = \frac{1}{2} \left( \frac{16}{11+16} - \frac{11}{11+16} \right) \cdot 360^\circ = 33^\circ 20'. \quad 49$$

**200.** Все углы, очевидно, описанные. Наибольший угол будет тот, у которого в формуле полуразности дуг уменьшаемое наибольшее, а вычитаемое наименьшее. Из соотношения 5:9:10 видно, что наибольший угол равен 52

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(9+10) - 5}{5+9+10} \cdot 360^\circ = 105^\circ.$$

**201.** Положим (черт. зад. № 197) дуга  $AEB$  равна  $x$ , тогда дополнительная (до окружности) дуга  $ADB$  равна  $360^\circ - x$ , а описанный угол  $ACB$  равен  $\frac{360^\circ - x}{2} = 180^\circ - x$  (1). Если же уменьшим дугу  $AB$  на  $m^\circ$ , то она выразится величиной  $x - m^\circ$ , а дополнительная дуга — через  $360^\circ - (x - m)$ , и угол  $ACB$  будет равен  $\frac{[360^\circ - (x - m)] - (x - m)}{2} = 180^\circ - x + m$  (2). Вычтя (1) из (2), получим  $m^\circ$ , т.е. угол увеличится на  $m^\circ$ .

**202.** В 4-угольнике  $ABMC$  вписанный  $\angle A = 74^\circ 23' 47''$ ; следовательно,  $\smile BC = 2.74^\circ 23' 47'' = 148^\circ 47' 34''$ . Углы  $ABM$  и  $ACM$ , составленные касательными  $MB$  и  $MC$  с хордами  $AB$  и  $AC$ , равны:  $\angle ABM = \frac{\smile ACB}{2} = \frac{\smile BC + \smile CA}{2}$ ;  $\angle ACM = \frac{\smile ABC}{2} = \frac{\smile AB + \smile BC}{2}$ ; а сумма этих углов, т.е.  $\angle ABM + \angle ACM = \frac{\smile BC + \smile CA + \smile AB + \smile BC}{2}$ ; заменяя в этом выражении  $\smile AB + \smile BC + \smile CA$  через  $360^\circ$  (ибо сумма этих 3 дуг есть полная окружность), а  $BC$  через  $148^\circ 47' 34''$  получим  $\angle ABM + \angle ACM = 180^\circ + 74^\circ 23' 47''$ . Сумма углов 4-угольника (зад. 81) равна  $4d = 360^\circ$ . Следовательно, искомый угол  $\angle BMC = 4d - (\angle ABM + \angle ACM + \angle BAC) = 360^\circ - (180^\circ + 74^\circ 23' 47'' + 74^\circ 23' 47'') = 31^\circ 12' 26''$ .

**203.** Дуга  $BKD$ , как дополнение (до окружности) дуги  $BMD$ , равна  $360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$ , следовательно, описанный (около меньшего круга) угол  $CAE$  равен  $\frac{230^\circ - 130^\circ}{2} = 50^\circ$ . Но угол  $CAE$

одновременно является и вписанным в большой круг, поэтому дуга  $CNE$ , на которую опирается  $\angle CAE = 50^\circ$ , равна  $2.50^\circ = 100^\circ$ .

**204.** Продолжим хорды  $EC$  и  $DF$  до пересечения их в точке  $K$ . Угол  $EKF$  является описанным для меньшего круга, а для большего — это угол, составленный двумя секущими. Величину угла  $EKF$  получаем, рассматривая его, как описанный

$$\left( \frac{\smile ALB - \smile AMB}{2} \right) \text{ или}$$

как составленный двумя секущ.  $EK$  и  $FK$ , т.е.  $\left( \frac{\smile EPF - \smile CND}{2} \right)$ .

$$\text{Следовательно, } \frac{\smile ALB - \smile AMB}{2} = \frac{\smile EPF - \smile CND}{2} \quad (1).$$

Но  $\smile ALB = 360^\circ - 154^\circ = 206^\circ$ ;  $\smile AMB = 154^\circ$ ;  $\smile EPF = 70^\circ$ . Подставив эти значения в (1), получим  $206^\circ - 154^\circ = 70^\circ - \smile CND$ . Отсюда  $\smile CND = 18^\circ$ .



**205.** Кратчайшее расстояние вершины описанного угла до окружности есть отрезок (внешний) прямой, соединяющей вершину угла с центром круга. Для доказательства, проведем через точку  $D$  пересечения прямой  $AO$  с окружностью—касательную  $KL$ . Всякая прямая, соединяющая вершину угла  $A$  с любой точкой окружности, будет больше перпендикуляра  $AD$ .

По условию  $AD=r$ , следовательно  $AO=2r$ . Проведя в точку касания  $B$  радиус  $OB$ , получим прямоугольный треугольник  $OAB$ , в котором гипотенуза  $OA=2r$ , а катет  $OB=r$ . Следовательно (зад. 67),  $\angle BAO=30^\circ$ . Весь же угол  $BAC=2 \cdot 30^\circ=60^\circ$ .

**206.** Продолжим радиус  $AO$  до пересечения с окружностью. Дуга  $BD$  равна  $180^\circ - \sphericalangle AB = 180^\circ - 40^\circ 23' 52'' = 139^\circ 36' 8''$ , а опирающийся на  $\sphericalangle BD$  угол  $BAO = \frac{139^\circ 36' 8''}{2} = 69^\circ 48' 4''$ .

Тр-к  $ABC$  равнобедренный ( $AB=AC$ ), и углы  $ACB$  и  $ABC$  равны: сумма этих углов ( $\angle ACB + \angle ABC$ ) равна внешнему углу  $BAO$ . А потому

$$\angle ACB = \angle \frac{BAO}{2} = \frac{69^\circ 48' 4''}{2} = 34^\circ 54' 2''.$$

**207.** В виду постоянства точек  $A$  и  $B$  и величины дуги  $CD$  (меняющей свое положение), угол  $M$  тоже будет постоянным, изменяющимся  $\frac{\sphericalangle ANB - \sphericalangle CD}{2}$ . Но дуга  $ANB = 360^\circ - m^\circ$ , значит,

$$\angle M = \frac{360^\circ - m^\circ - n^\circ}{2}.$$

Геометрическое место точек вершины угла  $M$ , опирающегося на дугу  $ANB$  и остающегося величиной постоянной, равной

$$\frac{360^\circ - m^\circ - n^\circ}{2}, \text{ есть дуга } AMB \text{ некоторого другого круга.}$$

Вписанный угол  $M$  опирается на дугу  $ALB$ —равную  $\frac{360^\circ - m^\circ - n^\circ}{2}$

(ибо угол равен  $\frac{360^\circ - m^\circ - n^\circ}{2}$ ). Следовательно, геометрическое место точек угла  $M$ —есть дуга  $AMB = m^\circ + n^\circ$ .

Чтобы построить искомую дугу—геометрическое место точек  $M$ —надо описать окружность, проходящую через точки  $M$ ,  $A$  и  $B$ .

**208.** Рассуждаем так же, как и в зад. 207. Угол  $ANB$  равен

$$\frac{\sphericalangle AB + \sphericalangle CD}{2} = \frac{360^\circ - (m^\circ - n^\circ)}{2},$$

а геометрическое место вершины  $N$  есть дуга круга, равная  $m^\circ - n^\circ$ .

**209.** Угол  $A$  равен  $90^\circ - 37^\circ 24' = 52^\circ 36'$  и, как вписанный, опирается на дугу  $DEK$ , равную  $2 \cdot 52^\circ 36' = 105^\circ 12'$ . Дуга  $DA$  равна полуокружности  $ADEK$  без  $\smile DEK$ , т.е.  $180^\circ - 105^\circ 12' = 74^\circ 48'$ , а дуга  $DE$  равна  $\smile AE - \smile AD = 90^\circ - 74^\circ 48' = 15^\circ 12'$ .

**210.** Соединив точки  $D$  и  $B$ , видим, что вписанный угол  $ADB$ , опирающийся на диаметр, прямой. Следовательно, прямоугольный тр-к  $ABC$  равнобедренный, так как высота его  $BD$  является одновременно и медианой ( $AD = DC$  по условию), а потому  $\angle A = 45^\circ$ .

**211.** Дополнив дугу до окружности, заметим, что  $BD$  — диаметр ( $M$  — центр круга), и вершина  $B$  лежит на окружности, т.е.  $\angle ABC$  — вписанный угол.

Но  $\angle ABC = 2d - (A + C) = 180^\circ - 2 \cdot 62^\circ 17' = 55^\circ 26'$ . А дуга  $AC$  (на которую опирается угол  $ABC$ ) вдвое более, т.е. содержит  $2 \cdot 55^\circ 26' = 110^\circ 52'$ .

**212.** Угол  $AOD$  равен  $180^\circ - \angle CDO = 180^\circ - 32^\circ = 148^\circ$ . Угол  $CDO$  равен углу  $BOD$  (накрест-лежащие)  $= 32^\circ$ . Углы  $BOD$  и  $AOC$  равны между собою, так как опираются на равные дуги ( $AC = BD$ ), т.е. и  $\angle AOC = 32^\circ$ . Следовательно,  $\angle CAO = \frac{180^\circ - 32^\circ}{2} = 74^\circ$ ,

а  $\angle DCA = 180^\circ - \angle CAO = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$ . Продолжим радиус  $CO$  до пересечения с окружностью в точке  $K$ ;  $\angle BOK = \angle AOC$  (как вертикальные)  $= 32^\circ$ , след., дуга  $DK = \smile KB + \smile BD = 64^\circ$ .

$$\text{Угол } AMC = \frac{\smile DK + \smile AC}{2} = \frac{64^\circ + 32^\circ}{2} = 48^\circ.$$

**213.** 1) Дуга  $AC$  (черт.  $a$ ) измеряется двойным вписанным углом  $B$ , т.е. равна  $2 \cdot 50^\circ = 100^\circ$ ; это есть мера центрального угла  $AOC$ . Угол же  $OAC$  (из равнобедренного тр-ка  $AOC$ , так как  $AO = OC$ ) равен  $\frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$ .

2) Так как  $\angle B$  — тупой (черт.  $b$ ), то центр круга лежит вне тр-ка  $ABC$ . Дуга  $AKC$  равна  $2 \cdot 126^\circ = 252^\circ$ ;  $\smile ABC = 360^\circ - 252^\circ = 108^\circ$ , значит и  $\angle AOC = 108^\circ$ , а  $\angle AOC = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$ .

**214.** Прямая  $O_1C$ , соединяющая центр вписанного в тр-к круга с вершиною тр-ка, есть биссектриса; следовательно,

$$\angle O_1CA = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ. \text{ Угол } OCO_1 = m^\circ, \text{ а потому } \angle ACO = 45^\circ - m^\circ.$$

Тр-к  $AOC$  — равнобедренный, так как  $AO$  и  $OC$  радиусы, следовательно,  $\angle A = \angle ACO = 45^\circ - m^\circ$ . Угол же  $B$  равен

$$90^\circ - \angle A = 90^\circ - (45^\circ - m^\circ) = 45^\circ + m^\circ.$$



**215.** 1-й случай. Треугольник  $ABC$  — остроугольный (черт. а). Опустим высоту  $BD$  на основание  $AC$  тр-ка;  $BD$  пройдет через центр  $O$  круга (так как центр описанного круга лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из середин сторон тр-ка), следовательно, лежит на прямой  $BD$ . Из прямоугольного тр-ка  $AOD$ , у которого один острый угол  $OAD$  равен  $20^{\circ}38'$ , следует, что второй острый угол  $AOD$  равен  $90^{\circ} - 20^{\circ}38' = 69^{\circ}22'$ ; этот угол внешний по отношению к острым углам  $ABO$  и  $BAO$  равнобедренного тр-ка  $AOB$ . Следовательно,

$$\angle BAO = \angle \frac{AOD}{2} = \frac{69^{\circ}22'}{2} = 34^{\circ}41',$$

$$\angle BAC = \angle BAO + \angle OAD = 34^{\circ}41' + 20^{\circ}38' = 55^{\circ}19'.$$

2-й случай. Тр-к  $ABC$  — тупоугольный (черт. б). Из прямоугольного тр-ка  $AOD$ , с острым углом  $OAD = 20^{\circ}38'$ , находим:  $\angle AOD = 90^{\circ} - 20^{\circ}38' = 69^{\circ}22'$ . А из равнобедренного тр-ка  $OAB$  ( $OA = OB$ , как радиусы), у которого угол  $AOB$  при вершине равен  $69^{\circ}22'$ , угол  $OAB = \frac{180^{\circ} - 69^{\circ}22'}{2} = 55^{\circ}19'$ . Искомый угол

$$\angle BAC = \angle OAB - \angle OAD = 55^{\circ}19' - 20^{\circ}38' = 34^{\circ}41'.$$

**216.** Прямоугольные тр-ки  $AOE$  и  $BOE$  равны, так как катет  $OE$  общий, а  $\angle OAE = \angle OBE$  ( $OA$  и  $OB$  биссектрисы равных углов); следовательно,  $AE = EB$ . Отрезки  $AD$  и  $AE$  равны, как касательные, проведенные из одной точки (зад. 158). Если обозначить  $CD$  через  $7x$ , то  $AD = 5x$ , а  $AE = AD = 5x$ ,  $AB = 2AE = 10x$ .

$$\text{Следовательно, } \frac{AC}{AB} = \frac{AD + DC}{AB} = \frac{12x}{10x} = \frac{6}{5}.$$

**217.** Соединяя центр круга  $O$  с точками касания  $D$  и  $E$  на катетах  $AC$  и  $BC$ , получим квадрат  $CDOE$ , так как  $OD = OE = r$  углы же  $ACB$ ,  $ODC$  и  $OEC$  — прямые, следовательно, и 4-й угол  $DOE$  прямой (зад. 81). Значит, и  $DC = CE = r$ . Обозначим  $AC$  через  $b$ ,  $BC$  через  $a$  и  $AB$  через  $c$ ; тогда  $a = BD + DC = BD + r$ ,  $b = AE + EC = AE + r$ ; а так как  $a + b + c = 2p$ , то  $BD + r + AE + r + c = 2p$ ; последнее равенство переписывается так (заменив  $BD + AE$  через  $c$ , так как  $BD + AE = BK + AK = BA = c$ ):  $2c + 2r = 2p$ , откуда  $c = p - r$ .

Примечание. Условие равнобедренности в этой задаче, как видно по решению, необязательно, а потому излишне.

**218.** Согласно указанию в зад. 158,  $FB = BD$ ,  $DC = EC$ ,  $AF = AE$ . Определим отрезок  $FB$ .

$$FB = (AB + BC + AC) - (BD + DC + EC + AE + AF).$$



Обозначим  $FB=BD$  через  $x$ . По условию  $AB+BC+AC=2p$ ,  $AE+EC=b$ ,  $DC+AF=EC+AE=b$ . Следовательно, выражение для  $FB$  переписывается так:  $x=2p-(x+b+b)$ ; откуда  $x=p-b$ . Подобным образом выводится, что  $AF=AE=p-a$ ,  $DC=EC=p-c$ .

**219.** Если вписанный угол  $ACD=12^{\circ}35'$ , то дуга  $AD$ , на которую он опирается, вдвое больше, т. е. равна  $2.12^{\circ}35'=25^{\circ}10'$ . Угол  $CAD$  равен  $90^{\circ}-12^{\circ}35'=77^{\circ}25'$ , а дуга  $CD$ , на которую он опирается, равна  $2.77^{\circ}25'=154^{\circ}50'$ . Так как в прямоугольнике противоположные стороны равны, то остальные две хорды, а, следовательно, и дуги, стягиваемые ими, тоже соответственно равны  $25^{\circ}10'$  и  $154^{\circ}50'$ .

**220.** Тр-к  $AML$  равнобедренный ( $AM=AL$ , как касательные из одной точки—зад. 158); угол  $AML=\angle ALM=\frac{180^{\circ}-37^{\circ}}{2}=71^{\circ}30'$  и измеряется половиной дуги  $ML$ ; следовательно, дуга  $ML=2.71^{\circ}30'=143^{\circ}$ ; противоположный угол  $C$  тоже равен  $37^{\circ}$  и дуга  $PQ$ , заключенная между его сторонами, также равна  $143^{\circ}$ . Остальные две дуги  $MP$  и  $LQ$  равны по  $\frac{360^{\circ}-2.143^{\circ}}{2}=37^{\circ}$ .

**221.** Положение центра обусловлено величиной угла  $ADB$ . Если центр  $O$  круга лежит вне трапеции, то угол  $ADB$ , как вписанный, измеряется половиной дуги  $AB$ , большей чем полуокружность, т. е.  $\angle ADB$ —тупой, в противном случае этот угол будет острым. Угол  $ADB$  измеряется  $\frac{\smile AB}{2}$  или  $360^{\circ}-(\smile AC+\smile CD+\smile DB)$ .

Но  $\smile AC=\smile DB=40^{\circ}$ , ибо  $\angle DMB$  измеряется  $\frac{\smile DB+\smile AC}{2}$  и равен  $40^{\circ}$ . Так как  $\angle ABD=50^{\circ}$  и измеряется  $\frac{\smile ACD}{2}=\frac{\smile AC+\smile CD}{2}=\frac{40^{\circ}+\smile CD}{2}$ , то  $50^{\circ}=\frac{40^{\circ}+\smile CD}{2}$ ,

откуда  $\smile CD=60^{\circ}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}\smile AB &= 360^{\circ}-(\smile AC+\smile CD+\smile DB)= \\ &= 360^{\circ}-(40^{\circ}+40^{\circ}+60^{\circ})=220^{\circ}, \text{ а } \angle ADB=110^{\circ}.\end{aligned}$$

Пользуясь приведенными в начале соображениями, заключаем, что при  $\angle ADB=110^{\circ}$ , т. е. при тупом угле  $ADB$ , центр круга лежит вне трапеции.

**222.** Во всяком 4-угольнике, описанном около окружности, суммы противоположных сторон равны, т. е.  $AC+BD=AB+CD$ . Периметр трапеции  $(AC+BD)+(AB+CD)=12$  м. Следовательно,



принимая во внимание указанное выше свойство описанного 4-угольника, находим  $AB + CD = \frac{12}{2} = 6$  м, а средняя линия равна  $\frac{AB + CD}{2} = \frac{6}{2} = 3$  м.

**223.** Проведем радиус  $OL$  в точку касания  $L$  нижнего основания. Продолжив радиус  $OL$  до пересечения с верхним основанием, убедимся, что точка пересечения  $K$  будет и точкой касания верхнего основания  $BC$ . (Радиус, проведенный в точку касания ( $OK$ ), тоже будет перпендикулярным к  $BC$ , а из одной точки ( $O$ ) можно опустить лишь один перпендикуляр). Высота  $BE = KL = 2r$ . По зад. 67,  $BE = \frac{AB}{2}$ . Величину  $AB$  найдем из равенства (зад. 222)

$AB + CD = BC + AD = 2$  м (сумма оснований равна удвоенной средней линии трапеции). Но  $AB = CD$ , поэтому  $AB = \frac{2}{2} = 1$  м.

Следовательно,  $BE = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$  м или  $2r = 50$  см, откуда  $r = 25$  см.

✓ **224.** Диагональ  $AC$ , перпендикулярная к середине хорды  $BD$ , есть диаметр, следовательно, углы  $D$  и  $B$ , как опирающиеся на диаметр, — прямые.  $\angle C$  равен, как дополнительный (до  $2d$ ) к  $\angle BAD$ ,

$$180^\circ - 70^\circ 23' 42'' = 109^\circ 36' 18''.$$

✓ **225.** 1) Возможно. Ибо суммы противоположных углов, как видно из соотношения  $2:4:5:3$ , равны между собою ( $2+5=4+3$ ), и каждая пара равна  $2d$  (в 4-угольнике сумма всех углов равна  $4d$ ).

2) Невозможно. Ибо  $5+8$  не равно  $7+9$ .

**226.** Обозначим радиус вписанного круга через  $r$ . Проведем касательную  $CD$  в точку  $K$  касания вписанного круга и дуги сектора. Тогда круг окажется вписанным и в равносторонний тр-к  $OCD$  (так как  $\angle O = 60^\circ$ , то и  $\angle C = \angle D = 60^\circ$ ).

Соединим  $O_1$  с точками  $O$  и  $C$ . Очевидно,  $OO_1 = CO_1$ , как радиусы описанного около треугольника круга.

Рассмотрим прямоугольный тр-к  $O_1CK$ . Угол  $O_1CK = 30^\circ$ , так как угол  $C = 60^\circ$  разделится биссектрисой  $O_1C$  пополам;  $O_1K$  — искомый  $r$ ;  $O_1C = O_1O = OK - O_1K = R - r$ .

Из прямоугольного тр-ка  $O_1CK$  имеем (зад. 67):

$$O_1K = \frac{O_1C}{2} \text{ или } r = \frac{R - r}{2}, \text{ откуда } r = \frac{R}{3}.$$



**227.** Так как  $\angle B + \angle D = 116^\circ + 64^\circ = 180^\circ$ , то, очевидно, и  $\angle A + \angle C = 180^\circ$  (зад. 81), и около 4-угольника можно описать круг. Угол  $ADC$  вписанный, а соответственная ему дуга  $ABC$  равна  $2.64^\circ = 128^\circ$ ; дуга  $BC$  (по углу  $BAC$ ) равна  $2.35^\circ = 70^\circ$ . Следовательно,  $\smile AB = \smile ABC - \smile BC = 128^\circ - 70^\circ = 58^\circ$ . Дуга  $CD$  (по углу  $CAD$ ) равна  $2.52^\circ = 104^\circ$ .

$$\text{Следовательно, } \angle AMB = \frac{\smile AB + \smile CD}{2} = \frac{58^\circ + 104^\circ}{2} = 81^\circ.$$

**228.** Опишем окружность из середины  $O$  гипотенузы радиусом, равным половине гипотенузы.

Прямой угол будет лежать на окружности, так как опирается на диаметр (прямой угол не может лежать внутри окружности, ибо тогда он измерялся бы более чем полуокружностью; прямой угол не может лежать вне окружности, ибо тогда он измерялся бы величиной, меньшей полуокружности); медиана в данном случае равна радиусу, т.е. равна половине  $AB$ .

**229.** Пусть  $ABC$  и  $ADC$  данные тр-ки. Если опишем круг около тр-ка  $ADC$ , то вершина  $B$  тр-ка  $ABC$  будет лежать на окружности, так как  $\angle B = \angle D$  (зад. 207). Дуга  $BD$  определится из того положения, что  $\angle AMC = \frac{\smile AC + \smile BD}{2}$  или  $70^\circ = \frac{80^\circ + \smile BD}{2}$  ( $\smile AC$  вдвое больше описанного угла  $ADC = 40^\circ$ ); откуда  $\smile BD = 60^\circ$ . Значит, и (так как хорды  $AB$  и  $BD$  равны) равная дуге  $BD$  дуга  $AB = 60^\circ$ , а  $\angle BCA = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ ; третий угол  $BAC$  тр-ка  $ABC$ , следовательно, будет равен  $180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ$ . Угол  $ACD$  тр-ка  $ACD$  измеряется половиной дуги  $ABD$ , т.е. равен  $60^\circ$  ( $\smile AB = \smile BD = 60^\circ$ ). Следовательно,  $\angle DAC = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$ .

**230.** Пусть  $R$  и  $r$  радиусы окружностей.

При внешнем касании расстояние центров равно сумме радиусов, при внутреннем касании — разности их.

Следовательно,  $R + r = 1,2$  м;  $R - r = 0,2$  м. Решая эти уравнения, получим:  $R = 0,7$  м,  $r = 0,5$  м.

**231.** Расстояние между центрами при внутреннем касании двух окружностей равно разности их радиусов. Следовательно, обозначив радиусы окружностей через  $R$  и  $r$ , имеем:  $R - r = 6$  см.

По условию  $\frac{R}{r} = \frac{5}{3}$ . Пусть  $R = 5x$ ,  $r = 3x$ , тогда  $5x - 3x = 6$  см; или  $x = 3$  см;  $R = 5x = 15$  см,  $r = 3x = 9$  см.



1) Расстояние между центрами равно 24 см, т.е. сумме радиусов. Окружности внешне касаются.

2) Расстояние между центрами равно 5 см, т.е. меньше разности радиусов (15 — 9). Одна окружность лежит внутри другой.

3) Расстояние между центрами = 28 см, т.е. больше суммы радиусов. Окружности лежат одна вне другой.

4) Расстояние между центрами = 20 см, т.е. больше разности (6) и меньше суммы (24) радиусов. Окружности пересекаются.

**232.** Обозначим радиусы окружностей через  $R$  и  $r$ .

Наименьшее расстояние между двумя концентрическими окружностями равно  $AB = OA - OB = R - r$ .

По условию  $R - r = 2$  см. Наибольшее расстояние между окружностями  $AC = AO + OC = R + r = 16$  см.

Решив эти уравнения, найдем;  $R = 9$  см,  $r = 7$  см.

**233.** Отношение между радиусами,  $-\frac{R}{r} = \frac{7}{4}$  а ширина кольца, т.е.  $R - r = 12$  м. Разрешая систему этих двух уравнений, найдем:  $R = 28$  м,  $r = 16$  м.

**234.** Пусть  $OA = 2,8$  м — радиус большего круга,  $OB = 1,2$  м — радиус меньшего круга,  $AB = 1$  м — кратчайшее расстояние между окружностями. Как видно из чертежа,  $OO_1 = OA - O_1B - BA = 2,8$  м —  $1,2$  м —  $1$  м =  $0,6$  м.

**235.** Обозначив радиусы окружностей, с центрами  $A$ ,  $B$  и  $C$ , через  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , видим, что  $AB = R_1 + R_2 = 8$  м,  $BC = R_2 + R_3 = 16$  м,  $AC = R_1 + R_3 = 20$  м. Разрешая систему этих 3-х уравнений, найдем  $R_1 = 6$  м,  $R_2 = 2$  м,  $R_3 = 14$  м.

**236.** Обозначим радиус большего круга через  $R$ , радиус меньших — через  $r$ . Сторона образовавшегося тр-ка  $OO_2 = OO_1 = OK - O_1K = R - r$ . По условию  $OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = 1,8$  м. Но  $OO_1 = OO_2 = R - r$ , а  $O_1O_2 = 2r$ , следовательно,  $(R - r) + (R - r) + 2r = 1,8$ , откуда  $R = 0,9$  м.

**237.** Пусть радиусы окружностей  $R$  и  $r$ . Прямые  $OO_1$  и  $OO_2$  равны между собой и выражаются величиной  $R - r$ . Тр-к  $OO_1O_2$  равносторонний, так как  $\angle O = 60^\circ$ , а  $OO_1 = OO_2$ , следовательно, и углы при основании равны по  $60^\circ$ , и потому расстояние между центрами тоже равно  $R - r$ .

**238.** Пусть  $KL$  общая внешняя касательная.

Проведя в точки касания  $K$  и  $L$  радиусы  $OK$  и  $O_1L$ , видим, что  $OK$  и  $O_1L$ , как радиусы, перпендикулярны к  $KL$  и, следовательно, параллельны между собой, а потому и линия центров  $OO_1 = KL$  (если две прямые в 4-угольнике равны и параллельны,



то и 2 другие тоже равны и параллельны). Но по условию  $KL = AB$ , следовательно и  $OO_1 = AB$ . Таким образом, ромб  $OA O_1 B$ , в котором диагонали равны, есть квадрат; угол  $AOB = 90^\circ$ , а потому и дуги  $AB = 90^\circ$ .

**239.** Проведя радиусы  $OK$  и  $O_1 L$  перпендикулярно к общей секущей, а также соединив центры  $O$  и  $O_1$ , увидим, что  $MN = OO_1 = 2R$ . (Так как  $AB = CD$ , то и  $OM = O_1 N$ , ибо равные хорды равно удалены от центра. А потому, если  $OM$  равна и параллельна  $O_1 N$ , то и  $OO_1$  равна и параллельна  $MN$ ). Обозначим отрезок  $AB$  через  $a$ , тогда  $AD = 3a$ ,  $AM = \frac{a}{2}$  и  $DN = \frac{a}{2}$ , а  $MN = 2a = 2R$ , откуда  $a = R$ . Соединив точки  $A$  и  $B$  с центром круга  $O$ , получим равнобедренный тр-к  $OAB$ , т.е.  $\angle AOB = 60^\circ$ . Значит, и  $\angle AB = 60^\circ$ .

**240.** Обозначим искомые радиусы через  $R$  и  $r$ .

Пусть  $AB$  общая внешняя касательная,  $KL$ —общая внутренняя касательная,  $OO_1$ —расстояние центров,  $OA$  и  $O_1 B$ —радиусы, проведенные из центров  $O$  и  $O_1$  в точки касания  $A$  и  $B$  общей внешней касательной. Угол  $KLB$  равен углу  $AOK$ , так как стороны, образующие эти углы, взаимно перпендикулярны ( $AB \perp OA$ ,  $OK \perp KL$ ). Проведя  $O_1 C$  параллельно  $AB$ , получим прямоугольный тр-к  $OO_1 C$ , в котором  $\angle O = 60^\circ$  (так как  $\angle BLK = 60^\circ$ ), гипотенуза  $OO_1 = R + r$ , а катет  $OC = OA - AC = OA - BO_1 = R - r$ .

Имеем (зад. 67)

$$OC = \frac{O_1 O}{2} \text{ или } R - r = \frac{R + r}{2}, \text{ откуда } R = 3r \text{ или } \frac{r}{R} = \frac{1}{3}.$$

**241.** Обозначим радиусы кругов через  $R$  и  $r$ . По условию, расстояние между центрами  $O$  и  $O_1$  кругов, т.е.  $OO_1 = R + r = 12$  м.

Продолжим внешнюю касательную  $AB$  до пересечения с линией центров  $OO_1$ . Тогда, по условию,  $\angle C = 30^\circ$ . Из точки  $O_1$  проведем  $O_1 D$  параллельную прямой  $AB$ . Тогда  $\angle DO_1 O = \angle C = 30^\circ$ .

$$\text{Как и в зад. 240, } OD = \frac{OO_1}{2} \text{ или } R - r = \frac{12}{2} = 6 \text{ м.}$$

Решив систему уравнений:  $R + r = 12$  м,  $R - r = 6$  м, найдем  $R = 9$  м,  $r = 3$  м.

**242.** Пусть хорда  $AB$  стягивает дугу в  $90^\circ$  и касается меньшего круга. Угол  $AOB$ , поэтому, тоже равен  $90^\circ$ . Соединяя центр  $O$  с точкой касания  $C$  хорды (касательной)  $AB$ , видим, что радиус  $OC$ , как перпендикуляр к хорде  $AB$ , делит хорду пополам:  $AC = CB$ . Тр-ки  $AOC$  и  $BOC$  равны, так как гипотенузы  $OA$  и  $OB$  равны,



как радиусы, — катеты  $AC = CB$ ; следовательно, и  $\angle AOC = \angle BOC = 45^\circ$ . Тогда в прямоугольном тр-ке  $AOC$  угол  $CAO$  тоже равен  $45^\circ$ , т.-е. тр-к  $AOC$  равнобедренный, и

$$OC = AC = \frac{AB}{2} = 0,5 \text{ м.}$$

**243.** 1-й способ. Дуги  $AB$  в обеих окружностях равны между собою, так как окружности равны. Рассматривая *один только* круг с центром  $O$ , видим, что  $\angle ACB$  вписанный, и дуга  $AB = 2 \cdot 36^\circ 15' = 72^\circ 30'$ . Рассматривая *только* круг с центром  $O_1$ , видим, что  $\angle ECD$ , как составленный двумя секущими, измеряется разностью дуг  $ED$  и  $AB$ , т.-е.

$$\angle ECD = \frac{\text{—} ED \text{—} \text{—} AB}{2} \text{ или } 36^\circ 15' = \frac{\text{—} ED \text{—} 72^\circ 30'}{2};$$

откуда  $\text{—} ED = 145^\circ$ .

2-й способ. Проведя хорду  $BF$  параллельно  $AD$ , получаем  $\text{—} DF = \text{—} AB = 72^\circ 30'$  ( $AB = 2 \cdot 36^\circ 15'$ ).

Угол  $EBF$  равен углу  $ECD$ , как соответственный, т.-е. равен  $32^\circ 15'$ , а дуга  $EF$ , на которую опирается  $\angle EBF$ , равна  $2 \cdot 36^\circ 15' = 72^\circ 30'$ . Следовательно, искомая дуга  $ED = \text{—} EF + \text{—} FD = 72^\circ 30' + 72^\circ 30' = 145^\circ$ .

**244.** Пусть  $AK$  — касательная к окружности  $O_1$  в точке  $A$ , а  $AL$  — касательная к окружности  $O$  в той же общей точке;  $AB$  — хорда, соединяющая точки пересечения окружностей.

Искомый угол  $KAL = \angle KAB + \angle BAL$ . Но угол  $KAB$  — между касательной  $AK$  и хордой  $AB$  — измеряется половиной дуги  $AB$  (окружности  $O_1$ ), т. е.  $\angle KAB = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$ . Подобным же образом,  $\angle BAK$  измеряется половиной дуги  $AB$  (окружности  $O$ ), т.-е.  $\angle BAL = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$ . Искомый угол  $KAL = \angle KAB + \angle BAL = 50^\circ + 20^\circ = 70^\circ$ .

### Пропорциональность прямых линий. Свойство биссектрисы угла и треугольника.

**245.** Две параллельные прямые пересекают стороны угла на пропорциональные части.

$$1) \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \text{ или } \frac{AE}{10} = \frac{12}{8}, \text{ откуда } AE = 15 \text{ м.}$$

$$2) \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ или } \frac{AD}{AB} + 1 = \frac{AE}{AC} + 1, \text{ откуда получается}$$

производная пропорция  $\frac{AD+AB}{AB} = \frac{AE+AC}{AC}$ . Подставив в последнюю пропорцию 21 м, 16 м и 12 м вместо  $AD+AB$ ,  $AE$  и  $AC$ , получим  $\frac{21}{AB} = \frac{28}{12}$ , откуда  $AB = 9$  м.

3)  $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$ ; вместо  $\frac{AC}{AE}$  подставим  $\left(\frac{3}{11}; 0,6\right)$  или проще  $\frac{5}{11}$ , вместо  $AB$  — разность  $AD-AB$  или  $AD-12$  дм.

Имеем:  $\frac{5}{11} = \frac{AD-12}{AD}$ , откуда  $AD = 22$  дм.

**246.**  $AD$  и  $BC$  — параллельны и пересекают стороны  $AM$  и  $DM$  угла  $AMD$ .

1) Составим пропорцию  $\frac{CM}{DC} = \frac{BM}{AB}$ ; подставляя данные условия, получим  $\frac{CM}{15} = \frac{8}{10}$ , откуда  $CM = 12$  дм.

2)  $\frac{CD}{CM} = \frac{AB}{BM}$ ; подставив вместо отношения  $\frac{CD}{CM}$  его значение  $\frac{1}{6}; 0,25 = \frac{2}{3}$  и вместо  $AB$  — величину его 1,2 м, получим  $\frac{2}{3} = \frac{1,2}{BM}$ , откуда  $BM = 1,8$  м.

3)  $\frac{CD}{CM} = \frac{AB}{BM}$  или  $\frac{CD}{CM} = \frac{17}{9}$ . Вычтем по 1 из обеих частей пропорции:  $\frac{CD}{CM} - 1 = \frac{17}{9} - 1$ ; получим производную пропорцию  $\frac{CD-CM}{CM} = \frac{17-9}{9}$  или  $(CD-CM = 1,6 \text{ м}) \frac{1,6}{CM} = \frac{8}{9}$ , откуда  $CM = 1,8$  м. Но  $CD-CM = 1,6$  м, откуда  $CD = 1,6 \text{ м} + CM = 1,6 + 1,8 = 3,4$  м.

**247.** 1) Составим пропорцию  $\frac{BM}{BN} = \frac{BA}{BC}$  или  $\frac{BM}{BN} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}$ . Прибавив по 1 к обеим частям пропорции, получим производную пропорцию  $\frac{BM}{BN} + 1 = \frac{3}{7} + 1$  или  $(BM+BN = 1 \text{ м}) \frac{10 \text{ дм}}{BN} = \frac{10}{7}$ ; отсюда  $BN = 7$  дм. Но  $BM+BN = 1$  м; следовательно,

$$BM = 1 \text{ м} - BN = 10 \text{ дм} - 7 \text{ дм} = 3 \text{ дм}.$$



2) Если  $BM = \frac{3}{7} BN$ , то  $\frac{BN}{BM} = \frac{7}{3}$ . Составим пропорцию  $\frac{BC}{AB} = \frac{BN}{BM}$  или  $\frac{BC}{AB} = \frac{7}{3}$ . Вычтя по 1 из каждой части пропор-

ции, получим производную пропорцию  $\frac{BC}{AB} - 1 = \frac{7}{3} - 1$  или

$$\frac{BC - AB}{AB} = \frac{7 - 3}{3} \text{ или (так как } BC - AB = 2 \text{ м)} \frac{2 \text{ м}}{AB} = \frac{4}{3},$$

откуда  $AB = \frac{3}{2} \text{ м}$  или 15 дм.

3) Если  $AM = \frac{15}{11} CN$ , то  $\frac{AM}{CN} = \frac{15}{11}$ . Составим пропорцию

$$\frac{BM}{BN} = \frac{AM}{CN}; \text{ но } BN = 2,75 \text{ м, а } \frac{AM}{CN} = \frac{15}{11},$$

следовательно,  $\frac{BM}{2,75} = \frac{15}{11}$  или  $BM = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ м}$ .

4) Составим пропорцию  $\frac{BM}{AM} = \frac{BN}{CN}$ . Обозначим  $BM$  и  $CN$  через  $x$  и вместо  $AM$  и  $BN$  подставим их значения.

$$\text{Тогда } \frac{x}{8 \text{ м}} = \frac{18}{x}, \text{ откуда } x^2 = 18 \cdot 8; x = 12 \text{ м.}$$

**248** 1) Для условия параллельности  $AC$  и  $DE$  необходимо существование пропорции (или производной от нее)  $\frac{BA}{AD} = \frac{BC}{CE}$ .

Перепишем пропорцию так:  $\frac{3}{4} = \frac{BC}{CE}$ . Составим производную

пропорцию  $\frac{3 + 4}{4} = \frac{BC + CE}{CE}$  или  $\frac{7}{4} = \frac{BE}{CE}$ . Этот же результат

соответствует и условию  $\frac{BE}{CE} = \frac{BE}{BE - BC} = \frac{2,8}{2,8 - 1,2} = \frac{7}{4}$ .

Пропорция соблюдена, следовательно прямые  $AC$  и  $DE$  параллельны.

2) Из равенства  $BC = \frac{5}{17} CE$  имеем:  $\frac{BC}{CE} = \frac{5}{17}$ . Составим производную пропорцию  $\frac{BC + CE}{CE} = \frac{5 + 17}{17}$  или  $\frac{BE}{CE} = \frac{22}{17}$ . По

условию  $\frac{BD}{AD} = \frac{11}{8,5} = \frac{22}{17}$ . Линии параллельны, ибо сохраняется

равенство  $\frac{BE}{CE} = \frac{BD}{AD}$ .

3) Из равенства  $BA = \frac{7}{13} BD$  имеем:  $\frac{BD}{BA} = \frac{13}{7}$ . По данным условиям можно написать  $\frac{CE}{BC} = \frac{2}{2,8}$ ;

$$\text{отсюда } \frac{CE + BC}{BC} = \frac{2 + 2,8}{2,8} = \frac{12}{7}$$

Условием параллельности должно быть  $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$ ; но первое отношение равно  $\frac{13}{7}$ , а второе  $\frac{12}{7}$ . Пропорции нет, следовательно, прямые не параллельны.

**249.** Тремя параллельными прямыми пересекаются  $AB$  и  $CD$  на пропорциональные части  $\frac{DN}{NC} = \frac{AM}{MB}$  или, подставив данные условия,  $\frac{DN}{1,8 \text{ м}} = \frac{1 \text{ м}}{1,2 \text{ м}}$ , откуда  $DN = 1,5 \text{ м}$ . Прямая  $CD = CN + ND = 1,8 + 1,5 = 3,3 \text{ м}$ .

**250.** 1-й случай. Треугольник  $ABC$  — остроугольный. Проекция наклонных  $AB$  и  $BC$  на основание будут  $AD = 15 \text{ м}$  и  $DC = 27 \text{ м}$ . Из двух наклонных большая имеет и большую проекцию, а потому  $BC = 45 \text{ м}$ .

Пусть  $L$  середина основания  $AC$ , так что  $LC = \frac{15 + 27}{2} = 21 \text{ м}$ . Следовательно,  $DL = DC - LC = 27 - 21 = 6 \text{ м}$ .  $BD$  и  $KL$  параллельны, как перпендикуляры к прямой  $AC$ , а потому  $BC$  и  $DC$  разделятся на пропорциональные части:  $\frac{BK}{KC} = \frac{DL}{LC}$ ; обозначив  $BK$  через  $x$ , а  $KC$  через  $BC - BK = 45 - x$ , перепишем пропорцию так:  $\frac{x}{45 - x} = \frac{6}{21}$ , откуда  $x = 10 \text{ м}$ ,  $45 - x = 35 \text{ м}$ .

2-й случай. Тр-к  $ABC$  — тупоугольный.

$DA = 15 \text{ м}$ ,  $DC = 27 \text{ м}$ , следовательно,  $AC = DC - DA = 27 - 15 = 12 \text{ м}$ ;  $LC = \frac{12}{2} = 6 \text{ м}$ ,  $DL = DC - LC = 27 - 6 = 21 \text{ м}$ . Составим пропорцию  $\frac{BK}{KC} = \frac{DL}{LC}$ ; обозначив  $BK$  через  $x$ ,  $KC$  через  $45 - x$ , перепишем пропорцию так:  $\frac{x}{45 - x} = \frac{21}{6}$ ; откуда  $x = 35$  и  $45 - x = 10 \text{ м}$ .

**251.** Из равенства  $BE = \frac{3}{7} AB$  и  $CF = \frac{3}{7} CD$  следует, что  $AB$  и  $CD$  разделены в отношении 3:4 (считая от вершин  $B$  и  $C$ ). В самом деле, если  $BE = \frac{3}{7} AB$ , то  $AE = AB - \frac{3}{7} AB = \frac{4}{7} AB$ .



Прямая  $EF$ , вследствие пропорциональности отрезков прямых  $AB$  и  $CD$ , параллельна основаниям  $BC$  и  $AD$ .

В тр-ке  $ABC$  стороны  $AC$  и  $AB$  разделяются параллельными  $BC$  и  $EM$  на пропорциональные части  $\frac{AM}{MC} = \frac{AE}{EB} = \frac{4}{3}$ . Следовательно,  $AC$ , равная 21 м, разделилась на части в отношении 4:3, т.е. на  $AM = 12$  м и  $MC = 9$  м.

**252.** Проведем  $FG \parallel EA$ . Стороны  $AB$  и  $BC$  угла  $ABC$  разделились на пропорциональные части:  $\frac{AG}{GB} = \frac{CF}{FB}$ . Обозначим  $AG$  через  $x$ , тогда  $BG = a - x$ ;  $\frac{CF}{FB} = \frac{n}{m}$ . Перепишем пропорцию так:

$$\frac{x}{a-x} = \frac{n}{m}, \text{ отсюда } x = \frac{an}{m+n}.$$

Стороны угла  $ADE$  тоже разделились на пропорциональные части  $\frac{DG}{GA} = \frac{DF}{FE}$  или  $DG = GA \cdot \frac{DF}{FE} = \frac{an}{m+n} \cdot \frac{p}{q}$ .

Отрезок  $AD = AG + DG = \frac{an}{m+n} + \frac{an}{m+n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{an}{m+n} \cdot \frac{p+q}{q}$ .

**253.** 1) По известной теореме (свойство биссектрисы в тр-ке) составим уравнение (обозначив  $AD$  через  $x$ ,  $DC$ —через  $20-x$ )  $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$  (1) или  $\frac{x}{20-x} = \frac{10}{15}$ , откуда  $x = 8$ ; следовательно,  $AD = 8$  м,  $DC = 12$  м.

2) Подставив в (1) вместо  $\frac{AD}{DC}$  и  $AB$  их значения  $\frac{8}{5}$  и 16, получим  $\frac{8}{5} = \frac{16}{BC}$ , откуда  $BC = 10$  м.

3) 1-й способ. Из равенства  $DC - AD = 1$  м, следует, что  $DC = 1 \text{ м} + AD$ . Обозначим  $AD$  через  $x$ , тогда  $DC = 1 + x$ .

Равенство (1) перепишется так:  $\frac{x}{1+x} = \frac{2}{7}$ , откуда  $x = \frac{2}{5}$ ,  $x + 1 = \frac{7}{5}$ , т.е.  $AD = \frac{2}{5}$  м,  $DC = \frac{7}{5}$  м.

2-й способ. Пропорцию  $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{7}$  перепишем так:  $\frac{BC}{AB} = \frac{7}{2}$ .

Составим пропорцию (свойство биссектрисы)  $\frac{DC}{AD} = \frac{BC}{AB}$  или

$\frac{DC}{AD} = \frac{7}{2}$ . Вычтя по 1 из обеих частей равенства, составим произ-

водную пропорцию  $\frac{DC - AD}{AD} = \frac{7 - 2}{2}$ ; но  $DC - AD = 1$ , следовательно,  $\frac{1}{AD} = \frac{5}{2}$ , откуда  $AD = \frac{2}{5} \text{ м}$ ,  $DC = AD + 1 = \frac{7}{5} \text{ м}$ ;  $AC = AD + DC = 18 \text{ дм}$ .

4) По известной теореме:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \quad \text{или} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{9}{6} = 1,5.$$

Если обозначить  $BC$  через  $x$ , то  $AB = 1,5x$ ; сторона  $AC = AD + DC = 9 + 6 = 15 \text{ см}$ . Периметр тр-ка  $ABC$  равен:  $AB + BC + AC = 40 \text{ см}$ , или  $1,5x + x + 15 \text{ см} = 40 \text{ см}$ ; отсюда  $x = 10 \text{ см}$ ,  $AB = 1,5x = 15 \text{ см}$ .

5) Если  $AD = \frac{5}{12} AC$ , то  $DC = AC - \frac{5}{12} AC = \frac{7}{12} AC$ , и отношение  $\frac{AD}{DC} = \frac{5}{12} : \frac{7}{12} = \frac{5}{7}$ . Равенство (1) перепишется так:

$$\frac{AB}{3\frac{1}{2}} = \frac{5}{7} \left( \frac{AD}{DC} \text{ и } BC \text{ заменяются через } \frac{5}{7} \text{ и } 3\frac{1}{2} \right), \text{ отсюда } AB = 2\frac{1}{2} \text{ см.}$$

**254.** По теореме (свойство биссектрисы в тр-ке, черт. зад.

№ 253)  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$  (1). Составим производную пропорцию:

$$\frac{AB + BC}{BC} = \frac{AD + DC}{DC} \quad \text{или} \quad \frac{AB + BC}{AD + DC} = \frac{BC}{DC}; \text{ но } AD + DC = AC,$$

а потому пропорция перепишется так:  $\frac{AB + BC}{AC} = \frac{BC}{DC}$ .

Сумма двух сторон треугольника больше третьей, следовательно,  $AB + BC > AC$ , и  $\frac{AB + BC}{AC}$  неправильная дробь; значит,

и  $\frac{BC}{DC}$  тоже неправильная дробь, т.е.  $BC > DC$ . Пропорцию

(1) можно переписать и так:  $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$ . Но  $\frac{BC}{DC} > 1$ , значит, и

$$\frac{AB}{AD} > 1, \text{ т.е. } AB > AD.$$

Этот же вывод можно сделать, переписав пропорцию (1) в виде  $\frac{BC}{AB} = \frac{DC}{AD}$ , и рассуждения вести, как в начале решения.

**255.** Пользуемся чертежом задачи № 253.

Как видно из решения зад. 254,  $AD < AB$  и  $DC < BC$ ; с другой стороны больший отрезок прилежит и большей стороне.



Таким образом если  $AB = 9$  см, то  $DC$  не может быть равно 6 см, следовательно,  $AD$  равно 6 см.

Составим пропорцию  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$  или (заменяя  $AB$ ,  $BC$ ,  $AD$  и  $DC$  через 9, 6, 6 и  $x$ )  $\frac{9}{6} : \frac{6}{x}$ , откуда  $x = 4$  см.

Следовательно,  $AC = AD + DC = 6 + 4 = 10$  см.

**256.** Черт. зад. № 253.

1) Из пропорции  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$  получим:  $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$ .

Но  $\frac{AB}{AD} = \frac{2}{3} : 0,5 = \frac{4}{3}$ ;  $BC = 12$  м. Подставив эти значения в равенство  $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$ , получим  $\frac{4}{3} = \frac{12}{DC}$ , откуда  $DC = 9$  м.

2) Из равенства  $AD = \frac{4}{15} AB$  имеем:  $\frac{AB}{AD} = \frac{15}{4}$ .

Пропорцию  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$  (1) можно переписать так:  $\frac{BC}{DC} = \frac{AB}{AD} = \frac{15}{4}$ . Из пропорции (1) составим производную пропорцию.

$\frac{AB + BC}{BC} = \frac{AD + DC}{DC}$  или  $\frac{AB + BC}{AD + DC} = \frac{BC}{DC}$ . Но  $AB + BC = 6$  м,

$AD + DC = AC$ ,  $\frac{BC}{DC} = \frac{15}{4}$ . Следовательно, пропорция  $\frac{AB + BC}{AD + DC} = \frac{BC}{DC}$  переписывается так:  $\frac{6 \text{ м}}{AC} = \frac{15}{4}$ , откуда  $AC = 1,6 \text{ м} = 16 \text{ дм}$ .

3) Обозначим  $AB$  через  $x$ , тогда и  $DC = x$ ; пропорция  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$  примет вид:  $\frac{x}{1,6} = \frac{0,9}{x}$  или  $x^2 = 0,9 \cdot 1,6$ ; откуда  $x = 1,2$  м.

**257.** Для того чтобы  $AD$  была биссектрисой, необходимо, чтобы  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ .

1) Проверим, можно ли поставить знак равенства между отношениями  $\frac{15}{12}$  и  $\frac{10}{8}$ . Очевидно, можно, и, следовательно,  $AD$  делит  $\angle A$  пополам.

2) Так как  $\frac{12}{56}$  не равно  $\frac{14}{3}$ , то  $AD$  не есть биссектриса.

3) Если  $AB = \frac{5}{11} AC$ , то  $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{11}$ ; но  $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{4,5} = \frac{4}{9}$ . Следовательно,  $\frac{AB}{AC}$  не равно  $\frac{BD}{DC}$ .  $AD$  не биссектриса.

4) Если  $BD = \frac{3}{17} BC$ , то  $DC = \frac{14}{17} BC$ , и  $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{14}$ .

Отношение  $\frac{AB}{BC} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$ . Следовательно,  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ , т.е.  $AD$ —биссектриса.

**258.** Условия задачи выполнены на чертеже. Проведем в ромбе диагональ  $AE$ . Так как диагонали ромба делят углы его пополам, то  $AE$  есть биссектриса. Составим пропорцию (свойство биссектрисы в тр-ке):  $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC}$ . Обозначим  $BE$  через  $x$ , тогда

$EC$  будет  $BC - x = 12 - x$ , и пропорция примет вид  $\frac{14}{10} = \frac{x}{12 - x}$ , откуда  $x = 7$ , т.е.  $BE = 7$  см, а  $EC = 12 - x = 5$  см.

**259.** Если  $AD = \frac{5}{11} AB$ , то  $BD = \frac{6}{11} AB$ ; следов.,  $\frac{BD}{AD} = \frac{6}{5}$ .

Прямая  $DE$ , параллельная  $AC$ , делит стороны угла  $B$  на пропорциональные части, т.е.  $\frac{BD}{AD} = \frac{BE}{EC}$ . Но  $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$  (зад. 258), знач.

чит, чтобы  $AD = \frac{5}{11} AB$ , т.е., чтобы  $\frac{BD}{AD} = \frac{6}{5}$ , необходимо, чтобы и  $\frac{AB}{AC}$ , равное  $\frac{BD}{AD}$ , тоже было равно  $\frac{6}{5}$ .

**260.** Пусть в тр-к  $ABC$  вписан полукруг, как указано на чертеже, при чем  $AB = 51$  см,  $BC = 85$  см и  $AC = 104$  см.

Из центра  $O$  круга проведем в точки касания  $K$  и  $L$  радиусы  $OK$  и  $OL$ . Образуется два равных тр-ка  $OKB$  и  $OLB$  ( $OK = OL$ , как радиусы круга,  $KB$  и  $BL$  равны, как касательные к кругу из одной точки—см. зад. 158—и  $BO$  общая сторона). Следовательно,  $\angle KBO = \angle LBO$ , т.е.  $BO$ —биссектриса угла  $B$ . Значит, можно составить пропорцию:

$\frac{AB}{BC} = \frac{AO}{OC}$ ; обозначим  $AO$  через  $x$ , а  $OC = AC - AO$  через  $104 - x$ ; заменив в пропорции  $AB$ ,  $BC$ ,  $AO$  и  $OC$  через 51, 85,  $x$  и  $104 - x$ , получим  $\frac{51}{85} = \frac{x}{104 - x}$ , откуда  $x = 39$  см. Итак,  $AQ = 39$  см;  $OC = 104 - 39 = 65$  см.



**261.** Обозначим основание  $AC$  тр-ка через  $4x$ ; тогда  $AB$  выразится через  $3x$ ;  $AD = \frac{AC}{2} = 2x$ . Соединим вершину  $A$  с центром  $O$  вписанного круга. Прямая  $AO$  будет биссектрисой, так как центр вписанного круга лежит на биссектрисе (точно — в точке пересечения биссектрис). Если обозначим  $OD$  через  $r$ , то  $OB = BD - OD = 20 \text{ см} - r$ . Составим пропорцию (теорема о биссектрисе в тр-ке):  $\frac{AB}{AD} = \frac{OB}{OD}$  или  $\frac{3x}{2x} = \frac{20-r}{r}$ , откуда (сократив левую часть на  $x$ ) получим:  $r = 8 \text{ см}$ .

**262.** См. зад. № 261.

Имеем равенство  $\frac{BO}{OD} = \frac{12}{5}$ . В пропорции  $\frac{AB}{AD} = \frac{BO}{OD}$  заменим  $AB$  через  $60 \text{ см}$ , а  $\frac{BO}{OD} = \frac{12}{5}$ ; тогда  $\frac{60}{AD} = \frac{12}{5}$ , откуда  $AD = 25 \text{ см}$ . Но  $AD = \frac{AC}{2}$ ; следовательно,  $AC = 50 \text{ см}$ .

**263.** См. зад. 261.

Если  $OD = \frac{2}{7} BD$ , то  $BO = \frac{5}{7} BD$ , а отношение  $\frac{BO}{OD} = \frac{5}{2}$ . Обозначим  $AB$  через  $x$ , тогда  $AD$  получится из пропорции  $\frac{AB}{AD} = \frac{BO}{OD}$  или  $\frac{x}{AD} = \frac{5}{2}$ ; откуда  $AD = \frac{2}{5} x$ , а  $AC = 2 \cdot \frac{2}{5} x = \frac{4}{5} x$ . Периметр тр-ка  $ABC = AB + BC + AC = x + x + \frac{4}{5} x = 56 \text{ см}$ , откуда  $x = 20 \text{ см}$ ; следовательно, боковая сторона —  $20 \text{ см}$ , а основание  $\frac{4}{5} x = 16 \text{ см}$ .

**264.** Углы  $CAD$  и  $BAD$  равны, ибо измеряются половиной равных дуг  $CD$  и  $DB$ . Следовательно,  $AE$  есть биссектриса угла  $A$ . Поэтому имеет место пропорция  $\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{EB}$ ; обозначив  $CE$  через  $x$ , а  $BE = BC - CE$  — через  $24 - x$ , и подставив значения  $AC$  и  $AB$ , мы можем написать пропорцию так:  $\frac{21}{15} = \frac{x}{24-x}$ , откуда  $x = 14 \text{ см}$ , т.е.  $EC = 14 \text{ см}$ ,  $BE = 10 \text{ см}$ .

**265.** Искомое отношение  $\frac{OD}{OB}$  равно  $\frac{DC}{BC}$ , когда рассмотрим тр-к  $BCD$ , где  $OC$  является биссектрисой; но  $BC = a$ , а величину  $DC$  получим из треугольника  $ABC$ , в котором биссектриса  $BD$  делит сторону  $AC$  в отношении  $\frac{DC}{AD} = \frac{BC}{AB}$ . Обозначив  $DC$

через  $x$ ,  $AD = AC - DC = b - x$ , и подставив значения сторон  $AB$  и  $BC$ , перепишем пропорцию так:  $\frac{x}{b-x} = \frac{a}{c}$  или  $cx = ab - ax$ ,

откуда  $x = \frac{ab}{a+c}$ . Итак,  $DC = \frac{ab}{a+c}$ , а искомое отношение  $\frac{OD}{OB}$  равно  $\frac{DC}{BC}$  или  $\frac{ab}{a+c} : a = \frac{b}{a+c}$ .

**266.** Биссектриса  $AD$  делает возможной пропорцию  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ ;

но  $\frac{AB}{AC} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ , следовательно,  $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{2}$ . Параллельная прямая  $ED$  пересекает стороны угла  $C$  на пропорциональные части так, что  $\frac{AE}{EC} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{2}$ ; но  $AC = 10$  см, следовательно,  $AE = 6$  см,  $EC = 4$  см.

Угол  $ADE$  равен углу  $BAD$ , как накрест-лежащие, угол же  $BAD$  равен углу  $DAE$ , следовательно,  $\angle ADE = \angle DAE$ ; значит, тр-к  $AED$  равнобедренный, т.е.  $DE = AE = 6$  см.

**267.** Тр-ки  $ANC$  и  $AMC$  равны между собою, так как основание  $AC$  общее,  $\angle MAC = \angle ACN$  (как углы при основании равнобедр. тр-ка  $ABC$ ) а  $\angle NAC = \angle MCA$  (как половины равных углов). Значит, и высоты  $MK = NL$ , а потому  $MN$  и  $AC$  параллельны. Углы  $MNA$  и  $NAC$  равны, как накрест-лежащие, и  $\angle MAN = \angle NAC$  ( $AN$ —биссектриса), а потому  $\angle MAN = \angle MNA$ . Следовательно,  $MN = AM$ .

Составим пропорцию (теорема о биссектрисе в треугольнике)

$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BC}$ . Обозначим  $AM$  через  $x$ , а  $BM = AB - AM$  через  $a - x$ ;  $BC = AB = a$ ,  $AC = b$ . Пропорция перепишется так:  $\frac{x}{a-x} = \frac{b}{a}$  или  $ax = ab - bx$ , откуда  $x = \frac{ab}{a+b}$ , т.е.  $AM = \frac{ab}{a+b}$  следовательно, и  $MN = \frac{ab}{a+b}$ .

### Подобие треугольников и многоугольников.

**268.** Стороны подобных треугольников пропорциональны. Очевидно, большая сторона—18 см—искомого тр-ка пропорциональна большей стороне—24 см—данного. Следовательно,  $\frac{x}{12} = \frac{18}{24}$

и  $\frac{y}{16} = \frac{18}{24}$ , откуда  $x = 9$  см;  $y = 12$  см.



**269.** Очевидно, стороны искомого подобного тр-ка тоже относятся, как 4:5:6, при чем 4 в отношении соответствует данной стороне 0,8 м.

А потому:  $\frac{x}{0,8} = \frac{5}{4}$ ;  $\frac{y}{0,8} = \frac{6}{4}$ ; откуда  $x = 1$  м,  $y = 1,2$  м.

**270.** Очевидно (см. зад. 269), стороны равны:

$$x = \frac{2}{2+5+4} \cdot 55 = 10 \text{ м.}; y = \frac{5}{2+5+4} \cdot 55 = 25 \text{ м.};$$

$$z = \frac{4}{2+5+4} \cdot 55 = 20 \text{ м.}$$

**271.** Угол  $C = 180^\circ - (A + B)$ , а угол  $C_1 = 180^\circ - (A_1 + B_1)$ ; по условию  $A = A_1$ ,  $B = B_1$ , следовательно и  $C = C_1$ , а потому тр-ки подобны.

Пользуемся свойством пропорциональности сторон.

1)  $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$  или  $\frac{10}{25} = \frac{14}{b_1}$ , откуда  $b_1 = 35$ ;  $\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}$  или  $\frac{10}{25} = \frac{c}{c_1}$ , откуда  $c = 8$ .

2)  $\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}$ . Составим производную пропорцию  $\frac{a - a_1}{a_1} = \frac{c - c_1}{c_1}$  или  $\frac{35 - 21}{21} = \frac{8}{c_1}$ , откуда  $c_1 = 12$ . Подставим значение  $c$  в основную пропорцию:  $\frac{35}{21} = \frac{c}{12}$ , откуда  $c = 20$ .

2-й способ.  $\frac{c}{c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{10}{14}$  или  $\frac{c}{c_1} = \frac{5}{7}$ ;  $c - c_1 = 8$ ; из системы этих уравнений определим  $c$  и  $c_1$ .

3) Так как тр-ки подобны, то  $\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1} = \frac{6}{7}$ . Имеем:

$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ ;  $\frac{b}{c} = \frac{6}{7}$ ; перемножив эти пропорции почленно, получим:

$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7}$  или  $\frac{a}{c} = \frac{9}{14}$  (или  $\frac{c}{a} = \frac{14}{9}$ ). Из пропорции  $\frac{c}{a} = \frac{14}{9}$

составим производную пропорцию:  $\frac{c + a}{a} = \frac{14 + 9}{9}$  или  $\frac{69}{a} = \frac{23}{9}$ ,

откуда  $a = 27$ .

2-й способ. Равенства  $\frac{a}{c} = \frac{9}{14}$  и  $a + c = 69$  разрешаем, как систему 2-х уравнений с 2-мя неизвестными.

**272.** Тр-ки подобны, так как два угла одного тр-ка соответственно равны двум углам другого. Пользуемся свойством пропорциональности сходственных сторон. Сторона  $DF$  получится из пропорции  $\frac{DF}{BC} = \frac{DE}{AB}$  или, подставляя значения  $BC$ ,  $DE$  и  $AB$ ,

перепишем пропорцию:  $\frac{DF}{20} = \frac{12}{16}$ , откуда  $DF = 15$  см.

Напишем пропорцию  $\frac{AC}{EF} = \frac{AB}{DE}$  или  $\frac{AC}{EF} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ .

Составим из последней пропорции производную:

$\frac{AC - EF}{EF} = \frac{4 - 3}{3}$  или  $\frac{6}{EF} = \frac{1}{3}$ , откуда  $EF = 18$  см.

В пропорции  $\frac{AC}{EF} = \frac{4}{3}$  заменим  $EF$  через 18 см;

получим  $\frac{AC}{18} = \frac{4}{3}$  или  $AC = 24$  см.

2-й способ. Из отношения  $\frac{AC}{EF} = \frac{4}{3}$  и равенства

$AC - EF = 6$  см определим  $AC$  и  $EF$ , рассматривая равенства, как систему 2-х уравнений с двумя неизвестными.

**273.** Обозначим через  $\alpha$  угол при вершине равнобедренного тр-ка, тогда углы при основании выразятся  $\frac{180 - \alpha}{2}$ . Вследствие равенства углов, тр-ки подобны. Обозначив через  $x$  боковую сторону искомого тр-ка, составим пропорцию:

$\frac{x}{17} = \frac{8}{10}$ , откуда  $x = 13,6$  см.

**274.** Тр-ки подобны, так как имеют по равному углу ( $B = B_1$ ), заключенному между пропорциональными сторонами

$$\left( \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = 2,5 \right).$$

А потому  $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = 2,5$ . По отношению сторон  $\frac{AC}{A_1C_1} = 2,5$  и по сумме их  $AC + A_1C_1 = 4,2$  м, можно определить эти стороны.  $AC = 3$  м,  $A_1C_1 = 1,2$  м.

2-й способ. Составим из  $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{2,5}{1}$  производную пропор-

цию  $\frac{AC + A_1C_1}{A_1C_1} = \frac{2,5 + 1}{1}$  или  $\frac{4,2}{A_1C_1} = 3,5$ , откуда  $A_1C_1 = 1,2$  м,

а из основной пропорции  $\frac{AC}{A_1C_1} = 2,5$  подстановкой 1,2 вместо  $A_1C_1$  получим  $AC = 3$  м.



**275.** Из равенства  $AB = \frac{4}{3} DE$  следует:  $\frac{AB}{DE} = \frac{4}{3}$ , а из равенства  $DF = 0,75 BC$  получается:  $\frac{BC}{DF} = \frac{1}{0,75} = \frac{4}{3}$ . Следовательно,

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF}$ , т.е. стороны, заключающие равный угол  $B = D$ , пропорциональны; а это значит, что тр-ки подобны.

По условию  $AC = EF = 5$  см, а из подобия тр-ков следует:  $\frac{AC}{EF} = \frac{AB}{DE} = \frac{4}{3}$ . Решается, как и зад. № 272.  $AC = 20$  см,  $DE = 14$  см.

**276.** 1) Отношения сходственных сторон  $\frac{1}{10}, \frac{1,5}{15}, \frac{2}{20}$  равны между собою, следовательно, тр-ки подобны, ибо стороны пропорциональны.

2) Отношения сторон большего тр-ка к сторонам меньшего следующие:  $\frac{2 \text{ м}}{16 \text{ дм}}, \frac{15 \text{ дм}}{12 \text{ дм}}, \frac{1 \text{ м}}{8 \text{ дм}}$ , эти отношения равны между собою. Треугольники подобны.

3) Как и в пункте 2 этой же задачи, отношения  $\frac{2 \text{ м}}{16 \text{ см}}, \frac{1,25 \text{ м}}{10 \text{ см}}, \frac{1 \text{ м}}{9 \text{ см}}$  или  $\frac{20}{16}, \frac{12,5}{10}, \frac{10}{9}$  не равны между собою. Треугольники не подобны.

(Чтобы тр-ки были подобны, следует в меньшем тр-ке заменить сторону 9 см на 8 см).

**277.** 1) Для подобия тр-ков необходимо (и достаточно) существование равенства  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ . Но  $\frac{AB}{AD} = \frac{15}{10}$ , а  $\frac{AC}{DE} = \frac{20}{12}$ , следовательно, между отношениями не может быть знака равенства, а потому тр-ки не подобны.

2) Как и в п. 1 этой же задачи, если  $\frac{AB}{AD} = \frac{15}{12}$ , а  $\frac{AC}{AE} = \frac{20}{9}$ , то равенства между отношениями нет, следовательно, треугольники не подобны. (Если изменить условия задачи и взять  $AD = 9$  м, а  $AE = 12$  м, то отношение  $\frac{AB}{AD} = \frac{15}{9}$ , а  $\frac{AC}{AE} = \frac{20}{12}$ . В таком случае отношения будут равны, и тр-ки окажутся подобными).

**278.** 1) В подобных тр-ках высоты пропорциональны сходственным сторонам. Но  $\frac{20}{16}$  не равно  $\frac{18}{12}$ , следовательно, не удо-

влетворяется одно из условий подобия тр-ков, а потому тр-ки не подобны.

(Если-б это условие и удовлетворялось, то по одному только условию, которое приведено, задача неразрешима).

2) Хотя отношение сторон ( $1/2$ ) и равно отношению высот ( $8/16$ ), но одного этого условия *недостаточно* для решения вопроса о подобии тр-ков.

Ответ можно формулировать и так: треугольники *могут* быть подобны, если будут приведены дополнительные условия *достаточные* для существования подобия.

**279.** Тр-ки  $ABC$  и  $DEF$  прямоугольные, ибо углы  $C$  и  $F$ , как опирающиеся на диаметр, прямые. Так как  $DE = \frac{13}{17}AB$ ,

а  $DF = \frac{13}{17}AC$ , то  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{17}{13}$ , т.е. в прямоугольных тр-ках  $ABC$  и  $DEF$  гипотенуза и катет одного пропорциональны гипотенузе и катету другого. Следовательно, эти тр-ки подобны, а потому справедлива пропорция:

$$\frac{FE}{BC} = \frac{DE}{AB} \text{ или } \frac{FE}{3,4 \text{ м}} = \frac{13}{17}, \text{ откуда } FE = 2,6 \text{ м.}$$

**280.** 1) Периметры подобных тр-ков пропорциональны сходственным сторонам. Следовательно,  $\frac{x}{0,8} = \frac{5,5}{0,8 + 1,6 + 2}$ , откуда

$$x = 1 \text{ м}; \quad \frac{y}{1,6} = \frac{5,5}{4,4}, \quad y = 2 \text{ м} \text{ и } \frac{z}{2} = \frac{5,5}{4,4}, \text{ откуда } z = 2,5 \text{ м.}$$

2) Отношение периметров, а значит, и сходственных сторон тр-ков равно  $11/13$ . Если сторону одного тр-ка обозначим через  $a$ , а сходственную сторону через  $a_1$ , то имеем равенства:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{11}{13}; \quad a_1 - a = 1 \text{ (очевидно, } a < a_1, \text{ что вытекает из отношения)}$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{11}{13}) \text{ Разрешив эти уравнения, получим } a_1 = 6,5 \text{ м, } a = 5,5 \text{ м.}$$

**281.** Тр-к  $BDE$  подобен тр-ку  $ABC$  (ибо прямая, параллельная стороне тр-ка, отсекает от последнего подобный тр-к).

1) Из подобия этих тр-ков следует:  $\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB}$ ; подставляя значения  $AC$ ,  $BD$  и  $AB$ , получим  $\frac{DE}{20} = \frac{11,9}{17}$ , откуда  $DE = 14 \text{ см.}$

$$2) BD = AB - AD = 15 \text{ дм} - 1 \text{ м} = 5 \text{ дм.}$$



В пропорции  $\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB}$  вместо  $AC$ ,  $BD$ ,  $AB$  подставим 18 дм, 5 дм, 15 дм. Получим  $\frac{DE}{18 \text{ дм}} = \frac{5}{15}$ , откуда  $DE = 6 \text{ дм}$ .

**282.** См. зад. № 281.

1)  $\frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AC}$  или, заменив  $AB$ ,  $DE$  и  $AC$  их значениями 16 см, 15 см, 2 дм, получим  $\frac{BD}{16 \text{ см}} = \frac{15 \text{ см}}{20 \text{ см}}$ , откуда  $BD = 12 \text{ см}$ . Отрезок  $AD = AB - BD = 16 \text{ см} - 12 \text{ см} = 4 \text{ см}$ .

2) Упростим отношение  $\frac{5}{7} : \frac{4}{11}$  в виде 55:28. На основании подобия тр-ков  $ABC$  и  $BDE$  напомним пропорцию:  $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE}$  или

$$\frac{AB}{BD} = \frac{55}{28}. \text{ Составим производную пропорцию (см. зад. № 247 п. 2.)}$$

$$\frac{AB - BD}{BD} = \frac{55 - 28}{28} = \frac{27}{28}.$$

Но  $AB - BD = AD$ , следовательно,  $\frac{AD}{BD} = \frac{27}{28}$ .

**283.** Пусть  $DE$  прямая, проведенная параллельно  $AC$ , причем  $KF = 2 \text{ см}$ . Тр-к  $BDE$  подобен тр-ку  $ABC$ , а потому напомним пропорцию (высоты в подобных тр-ках пропорциональны сходственным сторонам):  $\frac{DE}{AC} = \frac{BK}{BF}$ ; но  $AC = 30 \text{ см}$ ,  $BK = BF - FK = 12 - 2 = 10 \text{ см}$ ,  $BF = 12 \text{ см}$ . Следовательно,  $\frac{DE}{30} = \frac{10}{12}$ , откуда  $DE = 25 \text{ см}$ .

**284.** Черт. зад. № 283.

1) Положим  $DE = 12 \text{ дм}$ . Из подобия тр-ков следует:  $\frac{BK}{BF} = \frac{DE}{AC}$ ; подставляя значения  $BF$ ,  $DE$ ,  $AC$ , получим:  $\frac{BK}{25 \text{ дм}} = \frac{12}{20}$ , откуда  $BK = 15 \text{ дм}$ . Искомый отрезок  $KF = BF - BK = 25 \text{ дм} - 15 \text{ дм} = 10 \text{ дм}$  или 1 м.

2) Так как  $BF = BK + KF = BK + 9 \text{ см}$ ,  $DE = 20 \text{ см}$ ,  $AC = 32 \text{ см}$ , то пропорция  $\frac{BK}{BF} = \frac{DE}{AC}$  примет вид:  $\frac{BK}{BK + 9 \text{ см}} = \frac{20}{32}$  или  $32BK = 20BK + 180 \text{ см}$ , откуда  $BK = 15 \text{ см}$ , а  $BF = BK + 9 \text{ см} = 24 \text{ см}$ .

**285.** Пусть  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $BN = AM = k$ . Из подобия тр-ков (параллельная линия отсекает тр-к  $BMN$ , подобный тр-ку  $ABC$ ) следует;  $\frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC}$ ; но  $BM = AB - AM = c - k$ ; пропорция перепишется так:  $\frac{c-k}{c} = \frac{k}{a}$ , откуда  $k = \frac{ac}{a+c}$ , т.-е.

$BN = \frac{ac}{a+c}$ . Из подобия же следует и пропорция:  $\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC}$  или  $\frac{MN}{b} = \frac{ac}{a+c} : a$ , откуда  $MN = \frac{bc}{a+c}$ .

**286.** Тр-ки  $ABC$  и  $BDC$  подобны, так как угол  $C$  общий для обоих тр-ков, а  $\angle ABC = \angle BDC$ , по условию. Следовательно, и  $\angle A = \angle DBC$ .

а) Напишем пропорцию  $\frac{BC(\text{тр-к } BDC)}{AC(\text{тр-к } ABC)} = \frac{DC(\text{тр-к } BDC)}{BC(\text{тр-к } ABC)}$  Заменяя  $BC$  через  $x$ ,  $AC$  через  $16$  см ( $AD + DC = 7 + 9$ ),  $DC$  — через  $9$  см, получим:  $\frac{x}{16} = \frac{9}{x}$ , откуда  $x = 12$  см.

б)  $BD : BA = DC : BC = 9 : 12 = 3 : 4$ .

**287.** См. черт. зад. № 286.

Тр-ки  $ABC$  и  $ABD$  подобны, ибо (см. задачу 286) угол  $A$  общий,  $\angle ABD = \angle C$  (по условию), следовательно, и  $\angle ADB = \angle ABC$ . Обозначим  $AD$  через  $x$ . Напишем пропорцию:

$\frac{AD(\text{тр-к } ABD)}{AB(\text{тр-к } ABC)} = \frac{AB(\text{тр-к } ABD)}{AC(\text{тр-к } ABC)}$  или  $\frac{x}{2} = \frac{2}{4}$ , откуда  $x = 1$ , т.-е.  $AD = 1$ ;  $DC = AC - AD = 4 - 1 = 3$  м.

**288.** 1) По условию,  $CD = \frac{2}{5}AC$  и  $CE = \frac{2}{5}BC$ . Разделив почленно эти равенства, получим  $\frac{CD}{CE} = \frac{AC}{BC}$ , т.-е. стороны, заключающие угол  $C$ , пропорциональны; следовательно, тр-ки  $ABC$  и  $CDE$  подобны. (Примечание: линия  $ED$  в общем случае не параллельна  $AB$ ).

Из подобия тр-ков следует:  $\frac{ED}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{\frac{2}{5}AC}{AC} = \frac{2}{5}$ .

Решая систему уравнений  $\frac{ED}{AB} = \frac{2}{5}$  и  $AB - DE = 12$  см, определим  $AB = 20$  см,  $DE = 8$  см.

2) Тр-ки  $ABC$  и  $CDE$  подобны, т.-е.  $\angle EDC = \angle BAE$  и  $\angle CED = \angle ABC$ ; следовательно,  $\angle BDE + \angle BAE = \angle BDE + \angle EDC = 2d$ . Так же доказывается, что  $\angle AED + \angle ABD = 2d$ .



**289.** Тр-ки  $ABC$  и  $EBD$  подобны, так как  $\angle ABC = \angle EBD$ , как вертикальные,  $\frac{BC}{EB} = \frac{AB}{BD} = \frac{7}{4}$ . Из подобия тр-ков следует, что  $\angle EDB = \angle BAC$ , а потому  $AC \parallel ED$ .

Тр-ки  $BCF$  и  $EGB$  подобны, так как  $\angle BCF = \angle BEG$ , как накрест-лежащие,  $\angle CBF = \angle EBG$ , как вертикальные, следовательно, можно написать пропорцию:  $\frac{BG}{BF} = \frac{EB}{BC}$ ; но  $\frac{EB}{BC} = \frac{4}{7}$ , следовательно  $\frac{BG}{BF} = \frac{4}{7}$ . Так как  $GF = 44$  см, то  $BG = \frac{4}{11} \cdot 44 = 16$  см;

$$BF = \frac{7}{11} \cdot 44 = 28 \text{ см (или } BF = 44 - 16 = 28 \text{ см).}$$

**290.** Тр-ки  $BOC$  и  $AOD$  подобны, ибо  $\angle BOC = \angle AOD$ , как вертикальные,  $\angle OBC = \angle ODA$  как накрест-лежащие. Из подобия тр-ков следует  $\frac{OB}{OD} = \frac{OC}{AO}$ ; но  $OD = BD - OB = 27$  см —  $OB$ ,  $OC = 1$  дм,  $AO = 8$  см; следовательно, пропорция переписывается так:

$$\frac{OB}{27 \text{ см} - OB} = \frac{10}{8}, \text{ откуда } OB = 15 \text{ см; } OD = 27 \text{ см} - OB = 27 - 15 = 12 \text{ см.}$$

**291.** Пусть нижнее основание  $AD$ , верхнее  $BC$ .

Упростим отношение  $0,3 : \frac{2}{3}$  в виде  $9 : 20$ . На основании подобия тр-ков  $BOC$  и  $AOD$  напомним пропорцию:

$\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{OD}$  или  $\frac{BC}{AD} = \frac{9}{20}$  (1). Средняя линия трапеции равна сумме оснований, т.е.  $BC + AD = 2 \cdot 29 = 58$  см (2). Решив систему уравнений (1) и (2), найдем:  $BC = 18$  см,  $AD = 40$  см.

Из подобия же этих тр-ков имеем  $\frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB} = \frac{20}{9}$ .

**292.** Тр-ки  $ABD$  и  $BCD$  подобны, так как  $\angle CBD = \angle ADB$ , как накрест-лежащие,  $\angle ABD = \angle BCD$ , следовательно, и  $\angle BAD = \angle CBD$ . Из подобия тр-ков  $ABD$  и  $BCD$  следует  $\frac{AB(\text{тр-к } ABD)}{CD(\text{тр-к } BCD)} = \frac{BD}{BC}$  или  $\frac{AB}{15} = \frac{20}{10}$ , откуда  $AB = 30$  см. Из того же подобия

следует:  $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC}$  или  $\frac{AD}{20} = \frac{20}{10}$ , откуда  $AD = 40$  см.

**293.** См. зад. 292.

Тр-ки  $ABC$  и  $ACD$  подобны, а потому можно написать:

$$\frac{AC}{AD} (\text{тр-к } ACD) = \frac{BC}{AC} (\text{тр-к } ABC) \text{ или } \frac{AC}{27} = \frac{12}{AC},$$

$$\text{откуда } AC^2 = 12 \cdot 27; AC = 18 \text{ см.}$$

**294.** Пусть боковая сторона  $AB$  трапеции  $ABCD$  равна 16 см. Когда  $AB$  встретится с продолжением  $CD$  в точке  $E$ , то образуются два подобных тр-ка  $AED$  и  $EBC$ . Из подобия этих тр-ков следует:  $\frac{EB}{AE} = \frac{BC}{AD}$ ; но  $AE = AB + EB = 16 \text{ см} + EB$ ,  $\frac{BC}{AD} = \frac{5}{9}$ ; а потому пропорция переписывается так:  $\frac{EB}{16 + EB} = \frac{5}{9}$ ; отсюда  $EB = 20 \text{ см.}$

**295.** Тр-ки  $BEF$  и  $CED$  подобны, так как  $\angle BEF = \angle CED$ , как вертикальные, а  $\angle EBF = \angle ECD$ , как накрест-лежащие.  $CD = AB = 420 \text{ м.}$  Из подобия тр-ков  $BEF$  и  $CED$  следует:  $\frac{BF}{CD} = \frac{BE}{EC}$  или  $\frac{BF}{420 \text{ м}} = \frac{5}{7}$ , откуда  $BF = 300 \text{ м.}$

**296.** Тр-ки  $AFE$  и  $CED$  подобны, так как  $\angle EAF = \angle ECD$  как накрест-лежащие,  $\angle AEF = \angle DEC$  как вертикальные. Обозначим искомую  $BF$  через  $x$ . Из подобия тр-ков  $AFE$  и  $CED$  имеем пропорцию:

$$\frac{AF}{CD} = \frac{AE}{EC}, \text{ но } AF = AB + BF = a + x, CD = a, \frac{AE}{EC} = \frac{m}{n},$$

а потому пропорция переписывается так:

$$\frac{a + x}{a} = \frac{m}{n}, \text{ откуда } x = \frac{a(m - n)}{n}.$$

**297.** Пусть  $OE$  перпендикуляр к  $BC$  и т. д. по условию задачи. Прямоугольные тр-ки  $BEO$  и  $OKD$  равны между собою так как гипотенузы  $OB$  и  $OD$  равны между собою (диагонали параллелограмма взаимно делятся пополам), а острые углы  $BOE$  и  $KOD$  равны, как вертикальные; следовательно,  $BE = KD$ . А так как  $AK + KD = AD$ , то и  $AK + BE = AD = b$  (1). Тр-ки  $AFK$  и  $BFE$  подобны ( $BE$  и  $AK$  параллельны), а потому имеет место пропорция:  $\frac{BE}{AK} = \frac{BF}{AF}$ . Заменим в этой пропорции  $BF$  через  $c$ ,  $AF$  —



через  $a + c$  (т. к.  $AF = AB + BF$ ). Тогда пропорция переписывается так  $\frac{BE}{AK} = \frac{c}{a + c}$  (2). Из (1) имеем  $AK = b - BE$ ; подставив выражение  $AK$  во (2), найдем  $BE = \frac{2c}{a + 2c}$ .

**298.** Пусть  $ADEF$  — вписанный параллелограмм. Обозначим сторону  $AD = EF$  параллелограмма через  $6x$ , а  $AF$  — через  $5x$  (так как отношение их  $6:5$ ). Пусть  $AB = 20$  см,  $AC = 25$  см. Тр-ки  $ABC$  и  $ECF$  подобны ( $AB \parallel EF$ ), а потому напомним пропорцию:  $\frac{EF}{AB} = \frac{FC}{AC}$ . Но  $EF = 6x$ ,  $AB = 20$  см,  $AC = 25$  см.  $FC = AC - AF = 25$  см  $- 5x$ , пропорция переписывается так:  $\frac{6x}{20 \text{ см}} = \frac{25 \text{ см} - 5x}{25 \text{ см}}$ , откуда  $x = 2$  см; следоват.,  $5x = 10$  см,  $6x = 12$  см.

**299.** Обозначим сторону ромба (черт. зад. № 298) через  $x$ . Тр-ки  $ECF$  и  $ABC$  подобны ( $EF \parallel AB$ ), а потому напомним пропорцию:  $\frac{EF}{AB} = \frac{FC}{AC}$ ; но  $EF = x$ ,  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $FC = AC - AF = b - x$ , После подстановки пропорция переписывается так:  $\frac{x}{c} = \frac{b - x}{b}$ ; откуда  $x = \frac{bc}{b + c}$ .

**300.** Пусть  $ABCD$  — ромб,  $FE$  — прямая, проведенная через вершину  $B$  до пересечения с продолжениями сторон ромба  $AD$  и  $CD$ , при чем  $CE = p$ ,  $AF = q$ .

Тр-ки  $EFD$  и  $EBC$  подобны ( $BC \parallel FD$ ), а потому напомним пропорцию  $\frac{BC}{FD} = \frac{EC}{ED}$ . Обозначим сторону ромба через  $a$ ; тогда  $BC = a$ ,  $FD = AD + AF = a + q$ ,  $EC = p$ ,  $ED = DC + CE = a + p$ . Пропорция переписывается так:  $\frac{a}{a + q} = \frac{p}{a + p}$  или  $a^2 + ap = ap + pq$ ; отсюда  $a = \sqrt{pq}$ .

**301.** Пусть  $FDEG$  квадрат, вписанный в тр-к  $ABC$ . Пусть сторона квадрата —  $x$ ;  $AC = a$ ,  $BK = h$ . Высота  $BK$  стороной квадрата  $DE$  делится в точке  $L$  на части  $BL$  и  $LK$ ;  $LK$  равно стороне квадрата  $DF = x$ . Из подобия тр-ков  $ABC$  и  $DBE$  ( $DE \parallel AC$ ) имеем (пользуемся теоремой: высоты в подобных тр-ках пропорциональны сходственным сторонам):  $\frac{DE}{AC} = \frac{BL}{BK}$ ; но  $DE = x$ ,  $AC = a$ ;  $BK = h$ ,  $BL = BK - LK = h - x$ .

После соответственной подстановки пропорция переписывается так:  $\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}$ , откуда  $x = \frac{ah}{a+h}$ .

**302.** Пусть  $AC = 48$  см,  $BL = 16$  см. Обозначим стороны прямоугольника  $DE$  и  $DF$  через  $9x$  и  $5x$ . Как и в зад. 301, можно написать пропорцию  $\frac{DE}{AC} = \frac{BK}{BL}$ ; но  $DE = 9x$ ,  $AC = 48$  см,  $BK = BL - KL = 16$  см  $- 5x$ ,  $BL = 16$  см; а потому перепишем пропорцию так:  $\frac{9x}{48 \text{ см}} = \frac{16 - 5x}{16 \text{ см}}$ ,

откуда  $x = 2$  см; следоват.:  $5x = 10$  см,  $9x = 18$  см.

**303.** По условию гипотенуза  $EF$  параллельна  $AC = 30$  см, а высота  $BD = 10$  см. В равнобедренном прямоугольном тр-ке высота равна половине гипотенузы (зад. 62). Следовательно, если обозначить гипотенузу  $EF$  через  $x$ , то  $GK$ , или равный ему отрезок  $DL = \frac{x}{2}$ .

Тр-ки  $ABC$  и  $EBF$  подобны ( $EF \parallel AC$ ), а потому имеем пропорцию:  $\frac{EF}{AC} = \frac{BL}{BD}$ , но  $EF = x$ ,  $AC = 30$  см,  $BD = 10$  см,  $BL = BD - LD = 10 \text{ см} - \frac{x}{2}$ . Следовательно, пропорция пере-

писывается так:  $\frac{x}{30} = \frac{10 - \frac{x}{2}}{10}$ , откуда  $x = 12$  см.

**304.** Если из центра круга  $O$  проведем радиус  $OG$  в точку касания  $G$ , то  $OG$  перпендикулярен к  $AC$ . Задача решается так же, как и зад. 303.  $\frac{EF}{AC} = \frac{BL}{BD}$ ; но  $EF = 2r$  ( $r$ —радиус круга),  $AC = a$ ,  $BD = h$ ,  $BL = BD - LD = BD - OG = h - r$ . Следовательно, пропорция переписывается так:  $\frac{2r}{a} = \frac{h-r}{h}$ , откуда  $r = \frac{ah}{a+2h}$ .

**305.** В прямоугольном тр-ке  $ACD$  угол  $ADC = 90^\circ - \angle B$ , следовательно,  $\angle CAD = \angle B$ ; значит, прямоугольные тр-ки  $ABC$  и  $ACD$  подобны (так как имеют по равному острому углу), а потому справедлива пропорция:  $\frac{CB \text{ (тр-к } ABC)}{AC \text{ (тр-к } ADC)} = \frac{AC \text{ (тр-к } ABC)}{CD \text{ (тр-к } ADC)}$ , но  $CB = 12$  см,  $AC = 6$  см;  $CD$  обозначим через  $x$ . Тогда пропорция переписывается так:  $\frac{12}{6} = \frac{6}{x}$ , откуда  $x = 3$ , т.е.  $CD = 3$  см,  $BD = 12 - 3 = 9$  см.



**306.** Прямоугольные тр-ки  $BEC$  и  $ADC$ , имеющие общий острый угол  $C$ , подобны, а из их подобия следует:

$$\frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.$$

Зная отношение высот  $\frac{BE}{AD} = \frac{4}{3}$ , и сумму их  $BE + AD = 14$  м, легко найти значения их, решив систему этих 2-х уравнений:  $AD = 6$  м,  $BE = 8$  м.

**307.** Пусть  $BE$ —расстояние между большими сторонами параллелограмма—равно 8 дм. Из вершины  $D$  опустим на сторону  $AB$  перпендикуляр  $DF$  (выражающий расстояние между меньшими сторонами параллелограмма). Прямоугольные тр-ки  $ABE$  и  $ADF$  подобны ( $\angle A$  общий), а потому напомним пропорцию:  $\frac{DF}{BE} = \frac{AD}{AB}$  или  $\frac{DF}{8 \text{ дм}} = \frac{20 \text{ дм}}{16 \text{ дм}}$ , откуда  $DF = 10$  дм или 1 м.

**308.** Обозначим стороны параллелограмма через  $a$  и  $b$ ; тогда периметр его  $2a + 2b = 48$  см или  $a + b = 24$  см. Высоты обозначим через  $h$  и  $H$ . Как и в зад. 307,  $\frac{a}{b} = \frac{h}{H} = \frac{5}{7}$ . Зная сумму сторон пар-ма  $a + b = 24$  и отношение их  $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$ , определим  $a$  и  $b$ , решив систему этих уравнений:  $a = 10$  см,  $b = 14$  см.

**309.** Пусть  $AC$ —перпендикуляр из конца  $A$  хорды  $AB$  на касательную  $BC$ —равен  $a$ . Проведем из центра  $O$  перпендикуляр  $OD$  к хорде  $AB$  и радиус  $OB$ .

Прямоугольные тр-ки  $OBD$  и  $ABC$  подобны, так как  $\angle OBA = \angle CAB$ , как накрест-лежащие ( $OB$  и  $AC$  перпендикулярны к  $BC$ ).

Из подобия тр-ков имеем:  $\frac{AB}{OB} = \frac{AC}{BD}$ ; но  $AB = x$  (искомая хорда),  $OB = r$ ,  $AC = a$ ,  $BD = \frac{AB}{2} = \frac{x}{2}$ ; следовательно, можно переписать пропорцию так:  $\frac{x}{r} = \frac{a}{x/2}$ ; откуда  $x = \sqrt{2ar}$ .

**310.** Пусть  $AB$ —прямая, проведенная через точку касания. Равнобедренные тр-ки  $AOC$  и  $BO_1C$  подобны ( $\angle OCA = \angle O_1CB$ , как вертикальные, а потому и  $\angle A = \angle B$ ). Из их подобия имеем:  $\frac{OC}{O_1C} = \frac{AC}{BC} = \frac{13}{5}$  (1) (из равенства  $AC = \frac{13}{5}BC$ , следует и  $\frac{AC}{BC} = \frac{13}{5}$ ).

Но  $OO_1 = OC + O_1C = 36$  см (2), Следовательно, имея равенства (1) и (2), находим искомые (решив систему 2-х уравнений):  
 $OC = 26$  см,  $O_1C = 10$  см.

**311.** Треугольник  $EDC$  равнобедренный, так как  $\angle EDC = \angle DCA$  (как накрест-лежащие), а  $\angle DCA = \angle ECD$  (по условию)—значит, и  $\angle EDC = \angle ECD$ , а потому  $DE = EC$ . Тр-ки  $ABC$  и  $BDE$  подобны. Из подобия их имеем:  $\frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC}$ . Обозначим  $DE$  через  $x$ ; тогда и  $EC = x$ , а  $BE = BC - EC = a - x$ . Т.-е. пропорция переписывается так:  $\frac{x}{b} = \frac{a-x}{a}$ , откуда  $x = \frac{ab}{a+b}$ .

**312.** По теореме о биссектрисе имеем:  $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{8}$ . Прямоугольные тр-ки  $BDC$  и  $EFC$  подобны, так как  $BD$  и  $EF$  параллельны, как перпендикуляры к одной прямой. Из подобия этих тр-ков имеем:  $\frac{EF}{BD} = \frac{EC}{BC}$ ; но  $BD = 30$  см,  $EC = 8x$ ,  $BE = 7x$  (из отношения  $\frac{BE}{EC} = \frac{7}{8}$ ),  $BC = BE + EC = 7x + 8x = 15x$ , пропорция переписывается так:  $\frac{EF}{30 \text{ см}} = \frac{8x}{15x} = \frac{8}{15}$ ; отсюда  $EF = 16$  см.

**313.** Пусть  $AC = l$  и  $BD = m$ . Обозначим сторону ромба  $EFGK$  через  $x$ . Тр-ки  $ABC$  и  $EBF$  подобны ( $EF \parallel AC$ ). Из подобия их имеем:  $\frac{EF}{AC} = \frac{BL}{BO}$ ; но  $EF = x$ ,  $AC = l$ ,  $BO = \frac{BD}{2} = \frac{m}{2}$ .  
 $BL = BO - OL = \frac{BD}{2} - \frac{ML}{2} = \frac{m}{2} - \frac{x}{2} = \frac{m-x}{2}$  ( $ML = EG = x$ , так как стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма). Пропорция переписывается так:  $\frac{x}{l} = \frac{m-x}{2} : \frac{m}{2}$  или  $\frac{x}{l} = \frac{m-x}{m}$ ; отсюда  $x = \frac{lm}{l+m}$ .

**314.** 1-й способ. Проведем  $BG$  параллельно  $CD$ .  $EF$  разделится на части  $EK$  и  $KF = BC = b$ .  $EK$  определится из пропорции (тр-ки  $ABG$  и  $EBK$  подобны):  $\frac{EK}{AG} = \frac{EB}{AB}$ ; но  $AG = AD - GD = AD - BC = a - b$ ;  $EB = nx$ ;  $AB = AE + EB = mx + nx = (m+n)x$ .  
 [ Если  $\frac{AE}{EB} = \frac{m}{n}$ , то мы можем положить  $AE = mx$ ,  $EB = nx$  ].



Следовательно, пропорция переписывается так:  $\frac{EK}{a-b} = \frac{nx}{(m+n)x}$ ; отсюда, сократив правую часть равенства на  $x$ , получим:

$$EK = \frac{n(a-b)}{m+n}. \text{ Искомая } EF = EK + KF = \frac{n(a-b)}{m+n} + b = \frac{an+bm}{m+n}.$$

2-й способ. Проведем диагональ  $AC$ , которая в точке  $O$  разделит искомую  $EF$  на 2 отрезка  $EO$  и  $OF$ . Тр-ки  $ABC$  и  $AOE$ , а также  $ACD$  и  $COF$  подобны ( $EF \parallel BC$  и  $AD$ ). Из подобия тр-ков

$$ABC \text{ и } AOE \text{ имеем: } \frac{EO}{BC} = \frac{AE}{AB}; \text{ но } BC = b, AE = mx, AB = mx +$$

$$+ nx = (m+n)x. \text{ Пропорция переписывается так: } \frac{EO}{b} = \frac{mx}{(m+n)x},$$

$$\text{откуда } EO = \frac{bm}{m+n}. \text{ Из подобия тр-ков } ACD \text{ и } COF \text{ имеем:}$$

$$\frac{OF}{AD} = \frac{CO}{AC}; \text{ но } AD = a, \frac{CO}{AC} = \frac{n}{m+n} \left( \frac{CO}{AC} = \frac{EB}{AB} \right) \text{ — что вытекает}$$

$$\text{из подобия тр-ков } ABC \text{ и } AOE \text{ — и равно } \frac{nx}{(m+n)x}.$$

$$\text{Пропорция переписывается так: } \frac{OF}{a} = \frac{n}{m+n},$$

$$\text{откуда } OF = \frac{an}{m+n}. \text{ Искомая прямая}$$

$$EF = EO + OF = \frac{bm}{m+n} + \frac{an}{m+n} = \frac{an+bm}{m+n}.$$

**315.** Опустим на  $AB$  перпендикуляр  $PQ$ ; тогда  $LM = 2x$ ,  $MN = 3x$ ,  $NQ = 4x$ . Из подобия тр-ков  $GPK$  и  $APB$  следует:

$$\frac{PL}{PQ} = \frac{GK}{AB}; \text{ но } PQ = PL + LQ = PL + (2+3+4)x = PL + 9x,$$

$$GK = 60 \text{ см, } AB = 96 \text{ см, т.е. } \frac{PL}{PL+9x} = \frac{60}{96}, \text{ откуда } PL = 15x.$$

Из подобия тр-ков  $EFP$  и  $GKP$  имеем:

$$\frac{EF}{GK} = \frac{MP}{LP} \text{ или } \frac{EF}{60 \text{ см}} = \frac{LP+LM}{LP} = \frac{15x+2x}{15x} = \frac{17}{15}, \text{ откуда}$$

$EF = 68 \text{ см.}$  Таким же образом из подобия тр-ков  $CPD$  и  $GPK$  найдем  $CD = 80 \text{ см.}$

**316.** Положим  $MN = x$ . Из подобия тр-ков  $MBN$  и  $ABC$  имеем:  $\frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$ , откуда  $BN = \frac{BC \cdot MN}{AC} = \frac{ax}{b}$ . Отрезок  $NC = BC - BN = a - \frac{ax}{b} = \frac{a(b-x)}{b}$ .

По условию,  $MN$  есть средняя пропорциональная между  $BN$  и  $NC$ , т.е.  $\frac{BN}{MN} = \frac{MN}{NC}$  или  $\frac{ax}{b} : x = x : \frac{a(b-x)}{b}$ ,

$$\text{откуда } x = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}.$$

**317.** Проведем  $DF$  параллельно  $BC$ ; тогда  $DF = CE$ . Тр-ки  $ABC$  и  $ADF$  подобны, а потому имеем:  $\frac{AD}{DF} = \frac{AB}{BC} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$ .

Подставив в пропорцию  $CE$  вместо  $DF$ , получим  $\frac{AD}{CE} = \frac{3}{4}$ ; кроме того имеем:  $AD + CE = 16$  м. Разрешив эти два уравнения совместно, получим:  $AD = \frac{48}{7}$  м,  $BD = AB - AD = 24 - \frac{48}{7} = \frac{120}{7}$  м.

Треугольники  $ABC$  и  $BDE$  подобны. Из их подобия следует:  $\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB}$ ; но  $AC = 28$  м,  $BD = \frac{120}{7}$  м,  $AB = 24$  м. Следовательно, переписав пропорцию в виде  $\frac{DE}{28} = \frac{120}{7 \cdot 24}$ , получим  $DE = 20$  м.

**318.** Прямоугольные тр-ки  $AOE$  и  $OBD$  подобны, так как  $\angle AOE = \angle BOD$  как вертикальные. Из подобия этих тр-ков имеем:  $\frac{OE}{OD} = \frac{AO}{OB} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ . Обозначим  $OE$  и  $OD$  через  $3x$  и  $4x$ ; тогда  $AD = AO + OD = 9 \text{ см} + 4x$ ;  $BE = BO + OE = 12 \text{ см} + 3x$ . По условию  $AD + BE = 35$  см, т.е.  $(9 \text{ см} + 4x) + (12 \text{ см} + 3x) = 35 \text{ см}$ , откуда  $x = 2$  см. Следовательно,  $OD = 4x = 8$  см,  $OE = 3x = 6$  см.

**319.** Отрезки  $AE$  и  $AD$  равны, как касательные, проведенные из одной точки. Но  $AD = DC = 30$  см. ( $AD = \frac{AC}{2}$ , так как центр круга лежит на перпендикуляре, восстановленном из середины основания, который совпадает с высотой; последняя же делит основание равнобедренного тр-ка пополам). Следовательно,



$AE = 30$  см,  $EB = AB - AE = 100 - 30 = 70$  см. Из подобия тр-ков  $EBF$  и  $ABC$  имеем:  $\frac{EF}{AC} = \frac{EB}{AB}$  или  $\frac{EF}{60} = \frac{70}{100}$ , откуда  $EF = 42$  см.

**320.** Проведем радиус  $OK$  в точку касания  $K$  обеих окружн. Вследствие симметричности фигуры,  $OK$  разделит хорду  $AB$  пополам и будет, следовательно, перпендикуляром к  $AB$ . Соединим центр вписанного круга  $O_1$  с точкой касания  $D$ ; радиус  $O_1D$  — перпендикулярен к  $OA$ . Прямоугольные тр-ки  $OO_1D$  и  $ACQ$  подобны, так как у них общий острый угол  $AOC$ . Из подобия этих тр-ков имеем  $\frac{O_1D}{AC} = \frac{OO_1}{AO}$ ; обозначив радиус  $O_1D$  вписанного круга через  $r_1$  и приняв во внимание, что  $AC = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ ,  $OO_1 = OK - O_1K = r - r_1$ ,  $AO = r$ , перепишем пропорцию так:  $\frac{r_1}{a/2} = \frac{r - r_1}{r}$ , откуда  $r_1 = \frac{ar}{a + 2r}$ .

**321.** Обозначим через  $x$  продолжение  $BE$  стороны  $AB = a$ , а продолжение  $EC$  через  $y$ . Тогда  $AE = AB + BE = a + x$ ,  $DE = DC + CE = c + y$ . Тр-ки  $AED$  и  $BEC$  подобны, так как  $\angle E$  — общий для обоих тр-ков.  $\angle A = \angle ECB$ , так как  $\angle A + \angle BCD = 2d$  (свойство вписанного 4-угольника) и  $\angle ECB + \angle BCD = 2d$  (сумма смежных углов). Подобным же образом можно доказать, что  $\angle D = \angle EBC$ .

Из подобия тр-ков  $AED$  и  $BEC$  следует:

$$\frac{EB}{ED} = \frac{BC}{AD} \text{ или } \frac{x}{c+y} = \frac{b}{d} \quad (1); \quad \frac{EC}{AE} = \frac{BC}{AD} \text{ или } \frac{y}{a+x} = \frac{b}{d} \quad (2).$$

Разрешив эти 2 уравнения, найдем:  $x = \frac{b(ba + dc)}{d^2 - b^2}$ ,  $y = \frac{b(bc + da)}{d^2 - b^2}$ .

(Примечание. В условии задачи вм. слова „треугольника“ читать в последней строке „четыреугольника“).

**322.** Сходственные стороны подобных мн-ков пропорциональны. Стороне искомого 5-угольника в 12 см соответствует сторона в 14 см подобного ему. Следовательно, стороны искомого 5-угольника получатся из пропорции:

$$\frac{x}{35} = \frac{12}{14}; \quad \frac{y}{28} = \frac{12}{14}; \quad \frac{z}{21} = \frac{12}{14}; \quad \frac{t}{42} = \frac{12}{14}.$$

Отсюда стороны равны 30 см, 24 см, 18 см, 36 см.

**323.** Упростив отношения  $1:\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:2$ , получим  $6:3:4:12$ . Очевидно, и стороны подобного 4-угольника относятся, как  $6:3:4:12$ . Обозначим эти стороны через  $6x, 3x, 4x, 12x$ ; тогда периметр искомого 4-угольника равен  $6x + 3x + 4x + 12x = 75$  м, откуда  $x = 3$  м. Стороны 4-угольника равны: 18 м, 9 м, 12 м, 36 м.

**324.** Пусть наибольшая сторона подобного 4-угольника равна  $x$ , наименьшая —  $y$ . Значит,  $x + y = 28$ . Но сторонам  $x$  и  $y$  соответствуют пропорциональные стороны данного 4-угольника 25 см и 10 см; следовательно,  $\frac{x}{25} = \frac{y}{10}$  или  $2x = 5y$ . Решив уравнения:  $x + y = 28$  и  $2x = 5y$ , получим  $x = 20$  см,  $y = 8$  см. Остальные две стороны искомого 4-угольника найдутся из пропорции  $\frac{z}{15} = \frac{8}{10}$  и  $\frac{t}{20} = \frac{8}{10}$ ; отсюда  $z = 12$  см,  $t = 16$  см.

**325.** Сходственные диагонали подобных многоугольников пропорциональны сходственным сторонам. А потому  $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B_1}{AB}$  или  $\frac{A_1C_1}{12} = \frac{15}{10}$ ; откуда  $A_1C_1 = 18$  см;  $\frac{A_1D_1}{AD} = \frac{A_1B_1}{AB}$  или  $\frac{A_1D_1}{14} = \frac{15}{10}$ , откуда  $A_1D_1 = 21$  см.

**326.** Периметры подобных многоугольников относятся, как сходственные стороны. Обозначим периметры многоугольников через  $x$  и  $y$ ; тогда:  $x - y = 60$ ,  $\frac{x}{y} = \frac{35}{14}$  или  $2x = 5y$ . Решив эти уравнения, получим:  $x = 100$  м,  $y = 40$  м.

**327.** Указание—зад. 325.

Пусть диагонали искомого 4-угольника равны  $x$  и  $y$ . Тогда:  $x - y = 5$  см,  $\frac{x}{y} = \frac{24}{16}$  или  $2x = 3y$ . Решив эти 2 уравнения, получим:  $x = 15$  см,  $y = 10$  см.

**328.** Полученный 4-угольник  $AB_1C_1D_1$ , очевидно, подобен данному —  $ABCD$ : так как все стороны параллельны, то и углы равны; из параллельности же сторон в тр-ках  $ABC$  и  $AB_1C_1$  и в тр-ках  $ACD$  и  $AC_1D_1$  следует и пропорциональность сторон 4-угольников.

Периметры подобных многоугольников пропорциональны сходственным сторонам, следовательно, пропорциональны и сход-



ственным диагоналям. Так как  $CC_1 = \frac{3}{7}AC$ , то  $AC_1 = AC + CC_1 =$   
 $= AC + \frac{3}{7}AC = \frac{10}{7}AC$ , откуда  $\frac{AC_1}{AC} = \frac{10}{7}$ . Обозначив периметр  
 $AB_1C_1D_1$  через  $x$ , имеем:

$$\frac{\text{Перим. } AB_1C_1D_1}{\text{Перим. } ABCD} = \frac{AC_1}{AC} \text{ или } \frac{x}{56 \text{ см}} = \frac{10}{7}, \text{ откуда } x = 80 \text{ см.}$$

**329.** Вписанные многоугольники будут подобны, так как стороны представляют равные хорды (ибо они стягивают равные дуги), а углы опираются на равные дуги. В подобных вписанных многоугольниках периметры относятся, как радиусы. Следовательно, обозначив искомый радиус через  $r$ , имеем:  $\frac{r}{5} = \frac{24}{30}$ , откуда

$$r = 4 \text{ м.}$$

**330.** Напишем пропорцию:  $\frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BC}$  или  $\frac{BE}{a} = \frac{a}{b}$ , откуда

$$BE = \frac{a^2}{b}.$$

Примечание.  $BE < AB$ , так как подобный параллелограмм  $ABEF$  меньше пар-ма  $ABCD$ , как часть последнего; поэтому  $AB$  меньшая сторона данного — большего — пар-ма) не может быть меньшей стороной пар-ма  $ABEF$ ; следовательно,  $AB$  — большая сторона его, и  $BE < AB$ .

**331.** См. черт. зад. № 330. Напишем пропорцию:  $\frac{BE}{CD} = \frac{AB}{EC}$ ,

то  $CD = AB = a$ ,  $EC = BC - BE = b - BE = b - x$ , (обозначив  $BE$  через  $x$ ). Пропорция переписется так:  $\frac{x}{a} = \frac{a}{b-x}$  или  $x^2 -$

$$-bx + a^2 = 0, \text{ откуда } x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}.$$

**Числовая зависимость между линейными элементами треугольников и некоторых четырехугольников.**

1. Прямоугольный треугольник.

**332.** Гипотенуза равна: 1)  $\sqrt{12^2 + 35^2} = 37 \text{ см}$ ; 2)  $\sqrt{56^2 + 33^2} = 65 \text{ см}$ ;

$\sqrt{40^2 + 9^2} = 41 \text{ дм}$ ; 4)  $\sqrt{60^2 + 91^2} = 109 \text{ см}$ ; 5)  $\sqrt{21^2 + \frac{13^2}{4}} = 21\frac{1}{4}$ ;

$\sqrt{\frac{3^2}{2^2} + \frac{7^2}{16^2}} = \frac{25}{16}$ ; 7)  $\sqrt{16,8^2 + 2,6^2} = 17$ ; 8)  $\sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61} = 7,81...$

- 333.** Катет равен: 1)  $\sqrt{289^2 - 240^2} = 161$ ; 2)  $\sqrt{269^2 - 69^2} = 260$ ;  
 3)  $\sqrt{145^2 - 143^2} = 24$ ; 4)  $\sqrt{42,5^2 - 6,5^2} = 42$ ; 5)  $\sqrt{17^2 - \frac{77^2}{5^2}} = 7\frac{1}{5}$ ;  
 6)  $\sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51} = 7,14...$

**334.** Обозначим меньший катет через  $x$ , больший через  $x+1$ , гипотенузу через  $x+2$ . Тогда  $x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$  или, по упрощении:  $x^2 - 2x - 3 = 0$ , откуда  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -2$ . Отрицательный корень отбрасываем; т. к. катет не может быть отрицательным. Следовательно, катеты равны 3 и 4, гипотенуза = 5.

**335.** Гипотенуза  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . 1)  $\sqrt{15^2 + 20^2} = 25$ ;

$$2) \sqrt{24^2 + 7^2} = 25; 3) \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}.$$

Так как  $a^2 = pc$ , то  $p = \frac{a^2}{c}$ ;  $p = 1) \frac{15^2}{25} = 9$ ; 2)  $\frac{24^2}{25} = 23\frac{1}{25}$ ;

$$3) \frac{4^2}{\sqrt{41}} = \frac{4^2}{41} \sqrt{41} = \frac{16}{41} \sqrt{41}.$$

Так как  $b^2 = qc$ , то  $q = \frac{b^2}{c}$ ;  $q = 1) \frac{20^2}{25} = 16$ ; 2)  $\frac{7^2}{25} = 1\frac{24}{25}$ ;

$$3) \frac{5^2}{\sqrt{41}} = \frac{5^2 \sqrt{41}}{41} = \frac{25 \sqrt{41}}{41}.$$

Так как  $h^2 = pq$ , то  $h = \sqrt{pq}$ .  $h = 1) \sqrt{9 \cdot 16} = 12$ ;

$$2) \sqrt{23\frac{1}{25} \cdot 1\frac{24}{25}} = 6\frac{18}{25}; 3) \sqrt{\frac{16}{41} \sqrt{41} \cdot \frac{25}{41} \sqrt{41}} = \frac{20}{41} \sqrt{41}.$$

**336.** См. зад. 335.

$$1) b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{125^2 - 100^2} = 75;$$

$$p = \frac{a^2}{c} = \frac{100^2}{125} = 80$$

$$q = \frac{b^2}{c} = \frac{75^2}{125} = 45 \text{ или}$$

$$q = c - p = 125 - 80 = 45$$

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{80 \cdot 45} = 60$$

$$2) a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{169^2 - 65^2} = 156$$

$$p = \frac{a^2}{c} = \frac{156^2}{169} = 144$$

$$q = \frac{b^2}{c} = \frac{65^2}{169} = 25 \text{ или}$$

$$q = c - p = 169 - 144 = 25$$

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{144 \cdot 25} = 60.$$



$$3) b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{625^2 - 600^2} = 175$$

$$p = \frac{a^2}{c} = \frac{600^2}{625} = 576$$

$$q = \frac{b^2}{c} = \frac{175^2}{625} = 49 \text{ или } q = c - p = 625 - 576 = 49$$

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{576 \cdot 49} = 168.$$

**337.** См. зад. 335.

$$1) \text{ Из формулы } a^2 = pc \text{ следует, } c = \frac{a^2}{p} = \frac{6^2}{3,6} = 10.$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$q = \frac{b^2}{c} = \frac{8^2}{10} = 6,4 \text{ или}$$

$$q = c - p = 10 - 3,6 = 6,4$$

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{3,6 \cdot 6,4} = 4,8.$$

$$2) \text{ Из формулы } b^2 = qc \text{ следует } c = \frac{b^2}{q} = \frac{7^2}{1,9} = 25.$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$$

$$p = \frac{a^2}{c} = \frac{24^2}{25} = 23,04$$

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{23,04 \cdot 1,96} = 6,72.$$

**338.** См. зад. 335.

$$1) \text{ Из формулы } a^2 = cp \text{ следует } a = \sqrt{cp} = \sqrt{29 \cdot 15 \frac{6}{29}} = 21.$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$$

$$q = \frac{b^2}{c} = \frac{20^2}{29} = 13 \frac{23}{29} \text{ или}$$

$$q = c - p = 29 - 15 \frac{6}{29} = 13 \frac{23}{29}$$

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{15 \frac{6}{29} \cdot 13 \frac{23}{29}} = 14 \frac{14}{29}.$$

$$2) \text{ Из формулы } b^2 = cq \text{ след., что } b = \sqrt{cq} = \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}.$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 6} = \sqrt{3}$$

$$p = \frac{a^2}{c} = \frac{3}{3} = 1 \text{ или}$$

$$p = c - q = 3 - 2 = 1$$

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{1 \cdot 2} = \sqrt{2}.$$

339. См. зад. 335.

$$1) h = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3}} = 2$$

$$c = p + q = \frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{25}{6}$$

$$a = \sqrt{cp} = \sqrt{\frac{25}{6} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{5}{2}$$

$$b = \sqrt{cq} = \sqrt{\frac{25}{6} \cdot \frac{8}{3}} = \frac{10}{3}$$

$$2) h = \sqrt{pq} = \sqrt{2 \cdot 18} = 6$$

$$c = p + q = 2 + 18 = 20$$

$$a = \sqrt{cp} = \sqrt{20 \cdot 2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$b = \sqrt{cq} = \sqrt{20 \cdot 18} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$$

340. См. зад. № 335.

1) Из прямоугольного тр-ка  $BCD$  ( $\angle C = d$ ,  $D$  — точка пересечения высоты  $CD$  с гипотенузой) имеем:

$$p = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{136^2 - 120^2} = 64.$$

Из формулы  $a^2 = cp$  получаем  $c = \frac{a^2}{p} = \frac{136^2}{64} = 289$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{289^2 - 136^2} = 255$$

$$q = c - p = 289 - 64 = 225 \text{ или}$$

$$q = \frac{b^2}{c} = \frac{255^2}{289} = 225.$$

2) Из прямоугольного тр-ка  $ACD$  имеем:

$$q = \sqrt{b^2 - h^2} = \sqrt{9^2 - \left(8\frac{32}{41}\right)^2} = 1\frac{40}{41}$$

$$c = \frac{b^2}{q} = \frac{9^2}{1\frac{40}{41}} = 41$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$$

$$p = c - q = 41 - 1\frac{40}{41} = 39\frac{1}{41} \text{ или}$$

$$p = \frac{a^2}{c} = \frac{40^2}{41} = 39\frac{1}{41}.$$



**341.** См. зад. 340 и 335

$$1) a = \sqrt{p^2 + h^2} = \sqrt{1,75^2 + 6^2} = 6,25$$

$$c = \frac{a^2}{p} = \frac{6,25^2}{1,75} = 22 \frac{9}{28}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{\left(22 \frac{9}{28}\right)^2 - 6,25^2} = 21 \frac{3}{7}$$

$$q = c - p = 22 \frac{9}{28} - 1,75 = 20 \frac{4}{7}$$

$$2) b = \sqrt{q^2 + h^2} = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$c = \frac{b^2}{q} = \frac{5}{1} = 5$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$p = c - q = 5 - 1 = 4$$

**342.** См. зад. 335 и 340.

1) Так как  $p = c - q$ , то формулу  $a^2 = pc$  представим в виде  $a^2 = (c - q)c$ ; следовательно  $45^2 = (c - 48)c$  или  $c^2 - 48c - 2025 = 0$ , откуда  $c = 24 \pm \sqrt{24^2 + 2025} = 24 \pm 51$ . Берем положительное значение корня:  $c = 75$ .

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{75^2 - 45^2} = 60$$

$$p = c - q = 75 - 48 = 27$$

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{27 \cdot 48} = 36.$$

2) Так как  $q = c - p$ , то формулу  $b^2 = qc$  перепишем так:  $b^2 = (c - p)c$ . Следоват.,  $5^2 = (c - 2)c$  или  $c^2 - 2c - 25 = 0$ , откуда  $c = 1 \pm \sqrt{1 + 25}$ . Положительный корень будет  $c = 1 + \sqrt{26}$ ;

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(1 + \sqrt{26})^2 - 5^2} = \sqrt{2\sqrt{26} + 2}$$

$$q = c - p = 1 + \sqrt{26} - 2 = \sqrt{26} - 1$$

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{2(\sqrt{26} - 1)} = \sqrt{2\sqrt{26} - 2}$$

**343.** См. зад. 335 и 340.

1) Так как  $q = c - p$ , то формулу  $h^2 = pq$  перепишем так:  $h^2 = p(c - p)$ . Следовательно,  $6^2 = p(12\frac{1}{2} - p)$  или

$$2p^2 - 25p + 72 = 0, \text{ откуда } p = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 2 \cdot 72}}{2 \cdot 2} = \frac{25 \pm 7}{4};$$

$$p_1 = 8; \quad p_2 = 4,5.$$

Примечание. Очевидно, определяя подобным образом  $q$ , получим ту же формулу  $6^2 = q(12^{1/2} - q)$ , где вместо  $p$  будет  $q$ . Следовательно, получим те же корни для  $q$ . Это значит, что  $p$  и  $q$  взаимно-переместимы.

Примем  $p = 8$ .

$$q = c - p = 12,5 - 8 = 4,5$$

$$a = \sqrt{cp} = \sqrt{12^{1/2} \cdot 8} = 10$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ или}$$

$$b = \sqrt{cq} = \sqrt{12^{1/2} \cdot 4^{1/2}} = 7^{1/2}.$$

Примем  $p = 4^{1/2}$ .

$$q = c - p = 12^{1/2} - 4^{1/2} = 8.$$

Очевидно, когда взаимно перемещаются  $p$  и  $q$ , то переместятся и  $a$  и  $b$ . Следовательно,  $a = 7^{1/2}$ ,  $b = 10$ .

2) См. п. 1.

$$h^2 = pq = p(c - p), \text{ т.-е. } 5^2 = p(8 - p) \text{ или } p^2 - 8p + 25 = 0, \text{ откуда } p = 4 \pm \sqrt{-9} = 4 \pm 3i.$$

Задача невозможна, ибо дает для высоты мнимую величину. Наглядно это можем вывести, и не произведя указанных вычислений, следующим образом: если представить круг на диаметре, равном гипотенузе  $= 8$ , то перпендикуляр на диаметр не может быть больше радиуса — т.-е. больше 4. А потому высота  $= 5$  есть абсурд.

**344.** Отрезки гипотенузы относятся, как квадраты катетов ( $a^2 = cp$ ;  $b^2 = cq$ ; разделив равенства почленно, получим  $\frac{a^2}{b^2} = \frac{p}{q}$ ). 1) Имеем систему уравнений:  $p + q = 122$ ,  $\frac{p}{q} = \frac{5^2}{6^2}$ .

Решив ее, получим  $p = 50$ ,  $q = 72$ .

2) По условию,  $p - q = 2$ ;  $\frac{p}{q} = \frac{3^2}{2^2}$ . Решив систему этих уравнений, получим  $p = 3,6$  м;  $q = 1,6$  м;  $c = p + q = 3,6 + 1,6 = 5,2$  м. или 52 дм.

**345.** См. зад. 344.

Отношение отрезков гипотенузы  $\frac{p}{q} = \frac{3^2}{7^2}$  (1). По формуле

$h^2 = pq$  т.-е.  $42^2 \text{ см} = pq$  (2). Решив систему этих двух уравнений, находим:  $p = 18 \text{ см}$ ,  $q = 98 \text{ см}$ .

**346.** См. зад. 344. Так как  $\frac{a^2}{b^2} = \frac{p}{q}$ , то  $\frac{a^2}{b^2} = \frac{4}{3}$  (1) По условию  $a^2 - b^2 = 12$  (2). Решив эти уравнения, получим:  $a = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ ,  $b = 6$ .

**347.** По формуле  $a^2 + b^2 = c^2$ ; следовательно,  $a^2 + b^2 = 91^2$ . Но  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2,4}$ . Решив эти уравнения, получим  $a = 35$ ,  $b = 84$ .



**348.** Перепишем формулу  $c^2 - a^2 = b^2$  в виде  $c^2 - a^2 = 117^2$ . Разрешая это уравнение совместно с уравнением  $\frac{a}{c} = \frac{80}{89}$ , получим:  $a = 240$ ,  $c = 267$ .

**349.** См. зад. 344.

Формулу  $\frac{a^2}{b^2} = \frac{p}{q}$  перепишем, согласно условиям задачи:  $\frac{6^2}{b^2} = \frac{1}{3}$ , откуда  $b^2 = 3 \cdot 6^2 = 108$ ;  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 3 \cdot 6^2} = 12$ .

**350.** Формулу  $pq = h^2$  перепишем так:  $pq = 18^2$  и разрешим это уравнение совместно с отношением  $\frac{p}{q} = \frac{4}{9}$ . Получаем:  $p = 12$ ;  $q = 27$ ;  $c = p + q = 12 + 27 = 39$ .

**351.** 1) Формулу  $c^2 - a^2 = b^2$  перепишем так:  $c^2 - a^2 = 35^2$  и решим это уравнение совместно с ур-ем  $c + a = 49$ .

[Для этого разложим  $c^2 - a^2$  на  $(c - a)(c + a)$  или  $(c - a) \cdot 49$ ].

Получим  $c = 37$ ,  $a = 12$ .

2) Перепишем формулу  $c^2 - b^2 = a^2$  в виде  $c^2 - b^2 = 5^2$ . Это уравнение решим совместно с данным  $c - b = 2$  [для этого заметим, что  $c^2 - b^2 = (c - b)(c + b) = 2(c + b)$ ]. Получим:  $c = 7\frac{1}{4}$ ,  $b = 5\frac{1}{4}$ .

**352.** 1) Перепишем формулу  $a^2 + b^2 = c^2$  в виде уравнения  $a^2 + b^2 = 61^2$  и решим его совместно с данным  $a + b = 71$ . Получим:  $a_1 = 11$ ,  $b_1 = 60$ ;  $a_2 = 60$ ,  $b_2 = 11$ .

2) Перепишем формулу  $a^2 + b^2 = c^2$  в виде:  $a^2 + b^2 = 101^2$  и решим это уравнение совместно с уравнением:  $b - a = 79$ ; получаем  $a = 20$ ,  $b = 99$ .

**353.** Перепишем формулу  $pq = h^2$  в виде  $pq = 30^2$  и это уравнение разрешим совместно с данным:  $p - q = 32$ . Получим:  $p = 50$ ,  $q = 18$ .

**354.** 1) Перемножив формулы:  $a^2 = cp$ ,  $b^2 = cq$ , получим:  $a^2 b^2 = c^2 pq(1)$ ; но  $pq = h^2$ , следовательно, равенство (1) примет вид  $a^2 b^2 = c^2 h^2$ , откуда  $ab = ch$ .

Примечание. Эта же формула может быть получена проще, если выразить прямоугольный тр-к через его площадь  $\frac{ab}{2}$

или  $\frac{ch}{2}$ ; тогда  $\frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$  или  $ab = ch$ .

2) Возведя равенство  $a + b = 70$  в квадрат, получим:  $a^2 + b^2 + 2ab = 70^2(1)$ . Заметив, что  $ab = ch$  (см. п. 1) или  $ab = 24c$

(так как  $h = 24$ ), а  $a^2 + b^2 = c^2$ , перепишем равенство (1) так:  $c^2 + 48c - 4900 = 0$ , откуда  $c = -24 \pm \sqrt{24^2 + 4900} = -24 \pm 70$ ;  $c = 50$ . Отрицательный корень отпадает.

Так как  $ab = 24c$  или  $ab = 24 \cdot 50 = 1200$ , то разрешаем это уравнение совместно с уравнением  $a + b = 70$ . Получим  $a = 30$  или  $40$ ,  $b = 40$  или  $30$ .

3) Пользуемся способом решения п. 2 этой задачи.

Равенство  $a + b + c = 30$  перепишем так:  $a + b = 30 - c$  и возведем последнее выражение в квадрат. Получим  $a^2 + b^2 + 2ab = 900 + c^2 - 60c$ . Подставим вместо  $ab$  и  $a^2 + b^2$  равные им величины  $ch$  и  $c^2$ , а  $h$  заменим его числовой величиной  $48/13$ . Получим  $c^2 + 93/13c = 900 - 60c + c^2$  или  $900/13c = 900$ , откуда  $c = 13$ . Следовательно,  $a + b = 30 - c = 30 - 13 = 17$ ,  $ab = ch = 13 \cdot 48/13 = 60$ . Разрешая эти два уравнения, получим  $a = 5$  или  $12$ ,  $b = 12$  или  $5$ .

**355.** Напишем формулы  $a^2 + b^2 = c^2$  и  $a^2b^2 = c^2h^2$  (зад. 354, п. 1). Разделим эти равенства почленно. Получаем  $\frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{c^2}{c^2h^2}$  или  $\frac{a^2}{a^2b^2} + \frac{b^2}{a^2b^2} = \frac{c^2}{c^2h^2}$ ; по сокращении дробей, получим

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{h^2}.$$

**356.** 1) Пусть  $OA = a$ ,  $OB = b$ . Из прямоугольного треугольника  $OCB$ , в котором  $CB = OA = a$ , определим  $OC$ , как гипотенузу:  $OC = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

2) Диагонали прямоугольника равны квадратному корню из суммы квадратов двух смежных сторон  $x = \sqrt{60^2 + 91^2} = 109$  см.

**357.** 1)  $x = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ .

2) Если сторона квадрата  $a$ , то диагональ его (п. 1) равна  $a\sqrt{2}$ . Тогда по условию  $a\sqrt{2} - a = 2$  см. или  $a(\sqrt{2} - 1) = 2$ , откуда  $a = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = \frac{a(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = a(\sqrt{2} + 1)$  см.

**358.** 1) Если проведем в прямоугольнике диагональ—то она будет и диаметром, ибо на нее опирается прямой угол. Но диагональ равна (зад. 356, п. 2)  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , следовательно, радиус окружности равен  $1/2 \sqrt{a^2 + b^2}$ .

2) Пусть стороны прямоугольника  $8x$  и  $15x$ ; тогда (см. п. 1) радиус окружности  $34 = 1/2 \sqrt{(8x)^2 + (15x)^2}$ , откуда  $x = 4$ ;  $8x = 32$  см,  $15x = 60$  см.



**359.** 1) Гипотенуза вписанного прямоугольного тр-ка есть диаметр (зад. 358). Но гипотенуза данного тр-ка равна  $\sqrt{80^2 + 18^2} = \sqrt{6724} = 82$ . Следовательно, радиус описанного круга равен  $\frac{82}{2} = 41$  см.

2) Гипотенуза данного тр-ка равна  $\sqrt{16^2 + 12^2} = 20$  см; следовательно, медиана гипотенузы (см. зад. 228) равна  $\frac{20}{2} = 10$  см.

3) Проведя медиану, видим, что высота меньше медианы, как наклонной. Но медиана равна  $\frac{8}{2} = 4$ , следовательно, высота должна быть меньше 4 (значит, при высоте = 5 задача невозможна).

**360.** 1) Опустив высоту, делим тр-к на 2 равных прямоугольных тр-ка  $ABD$  и  $BDC$ . Рассматривая один из них, напр.,  $ABD$ , получаем высоту  $BD$ , как катет (второй катет  $AD = \frac{AC}{2} = \frac{16}{2} = 8$  см).  $BD = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$  см.

2) Обозначив основание через  $48x$ , а боковую сторону через  $25x$ , из прямоугольного тр-ка  $ABD$  найдем:  $BD^2 = AB^2 - AD^2$  или  $35^2 = 25^2 x^2 - 24^2 x^2$  или  $49x^2 = 35^2$ , откуда  $x = 5$ ;  $48x = 240$  см,  $25x = 125$  см.

3) Если углы при основании равнобедренного тр-ка равны по  $45^\circ$ , то угол при вершине равен  $90^\circ$ , т.е. тр-к прямоугольный. Обозначим катеты через  $x$ ; тогда  $2x^2 = 4^2$  или  $x = 2\sqrt{2}$ .

**361.** 1) Решается, как зад. 360, п. 1.

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} \sqrt{3}.$$

2) См. п. 1 этой зад.

$$a - h = a - \frac{a}{2} \sqrt{3} = m \quad \text{или} \quad \frac{a(2 - \sqrt{3})}{2} = m, \quad \text{откуда}$$

$$a = \frac{2m}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2m(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2m(2 + \sqrt{3}).$$

3) См. зад. 67. Пусть искомый катет (против угла в  $30^\circ$ )— $x$ ; тогда гипотенуза— $2x$ , а данный катет (больший—против угла в  $60^\circ$ ) выразится через  $\sqrt{(2x)^2 - x^2}$  или  $x\sqrt{3} = 6$  см, откуда  $x = 2\sqrt{3}$ , а гипотенуза  $2x = 4\sqrt{3}$ .

**362.** 1) 1-й случай. Треугольник с острыми углами при основании. Пусть высота  $BD=24$  см делит основание на отрезки  $AD$  и  $DC$ . Пусть  $AB=25$  см,  $BC=30$  см.  $AD$  и  $DC$  определяются, как катеты, из тр-ков  $ABD$  и  $BDC$ .  $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{25^2-24^2}=7$  см;  $DC=\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{30^2-24^2}=18$  см.

Основание  $AC=AD+DC=7+18=25$  см.

2-й случай. Треугольник с тупым углом при основании. Так же, как и в 1 случае, определяем  $CD$  и  $AC$  из прямоугольных тр-ков  $BCD$  и  $ABD$ .  $DC=18$  см,  $AD=7$  см,  $AC=DC-AD=18-7=11$  см.

2) Пусть  $\angle A=45^\circ$  и больше угла  $C$ . Тогда  $BC>AB$  (против большего угла лежит и большая сторона), а отрезок — 21 см прилежит большей наклонной  $BC$  (большие наклонные имеют и большие проекции).

Прямоугольный тр-к  $ABD$  равнобедренный, так как  $\angle A=45^\circ$ , а потому и  $\angle ABD=90^\circ-45^\circ=45^\circ$ , значит,  $BD=AD=20$  см. Искомая  $BC$  определится, как гипотенуза прямоугольного тр-ка, в котором катет  $BD=20$  см, а катет  $DC=21$  см.

$BC=\sqrt{BD^2+DC^2}=\sqrt{20^2+21^2}=29$  см.

3) Пусть  $AB=41$  см,  $BC=50$  см,  $AD:DC=3:10$  (большая наклонная имеет и большую проекцию). Пусть  $AD=3x$ ,  $DC=10x$ .

Из тр-ка  $ABD$ :  $BD^2=AB^2-AD^2=41^2-(3x)^2$  (1).

Из тр-ка  $BCD$ :  $BD^2=BC^2-DC^2=50^2-(10x)^2$  (2).

Следовательно,  $41^2-(3x)^2=50^2-(10x)^2$ , откуда  $x=3$ , а  $BD$  определится из (1) [или (2)]:  $BD^2=41^2-(3x)^2=41^2-9^2$ , откуда  $BD=40$  см.

**363.** 1) Диагонали ромба взаимно-перпендикулярны и делятся пополам. Следовательно, диагонали, пересекаясь, образуют со сторонами ромба 4 равных прямоугольных тр-ка. Катетами этих тр-ков служат половины диагоналей, а гипотенузой—сторона ромба.

Сторона ромба равна  $\sqrt{\left(\frac{24}{2}\right)^2+\left(\frac{70}{2}\right)^2}=37$  см.

2) Если периметр ромба равен 1 м, то сторона его равна  $\frac{1}{4}$  м. или 25 см. Как и в п. 1 этой задачи, напишем зависимость между стороной и диагоналями ромба. Положим диагонали  $3x$  и  $4x$ , тогда  $\left(\frac{3x}{2}\right)^2+\left(\frac{4x}{2}\right)^2=25^2$ , откуда  $x=10$ ;  $3x=30$  см или 3 дм,  $4x=40$  см или 4 дм.



**364.** 1) Из вершины  $B$  проведем  $BE$  параллельно  $CD$ . Получим равнобедренный тр-к  $ABE$ , у которого высота  $BF$  делит основание  $AE$  пополам:  $AF = \frac{AE}{2} = \frac{AD - ED}{2} = \frac{AD - BC}{2} = \frac{24 - 10}{2} = 7 \text{ см.}$

Из прямоугольного тр-ка  $ABF$  имеем:

$$\text{высота } BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24 \text{ см.}$$

2) Как видно из чертежа,  $FD$  равна средней линии трапеции (приложив слева к  $AD$  линию  $BC$ , увидим, что  $F$  есть середина прямой, равной сумме оснований). Отрезок  $FD = 45 \text{ см.}$  Из прямоугольного тр-ка  $ABF$  имеем:  $AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{41^2 - 40^2} = 9 \text{ см.}$  Следовательно,  $AD = FD + AF = 45 + 9 = 54 \text{ см.}$

**365.** Пусть  $AB$  боковая сторона трапеции  $ABCD$ , перпендикулярная к основаниям. Из прямоугольных тр-ков  $ABC$  и  $ABD$  имеем:  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ;  $BD^2 = AB^2 + AD^2$ . Вычтя почленно из второго равенства первое, получим:  $BD^2 - AC^2 = AD^2 - BC^2$ .

**366.** По условию  $AC = CD = a$ . Из прямоугольного тр-ка  $ABC$  определим  $AB$ .  $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

Тр-к  $ACD$  — равнобедренный ( $AC = CD$ ). Следовательно, основание  $AD$  высотой  $CE$  делится пополам, т.е.  $AE = \frac{AD}{2}$ . Но  $AE = BC$

(отрезки параллельных между параллельными)  $= b$ ; следовательно,

но,  $AE = \frac{AD}{2} = b$ , откуда  $AD = 2b$ . Из прямоугольного тр-ка  $ABD$

имеем:  $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{(a^2 - b^2) + (2b)^2} = \sqrt{a^2 + 3b^2}$ .

**367.** 1) Пусть  $DC$  — перпендикуляр на хорду  $AB$ , а потому  $AB$  разделится пополам, т.е.  $AC = \frac{AB}{2} = \frac{16 \text{ м}}{2} = 8 \text{ м}$  или  $80 \text{ дм.}$

Из прямоугольного тр-ка  $AOC$  определяем  $OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{89^2 - 80^2} = 39 \text{ дм.}$

2) Радиус окружности  $OD = OC + CD = 9 + 32 = 41 \text{ см.}$  Из прямоугольного тр-ка  $OAC$  определим  $AC = \sqrt{OA^2 - OC^2}$ ; но  $OA$  — радиус окружности, следовательно,  $AC = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40 \text{ см.}$

3) 1-й случай. Общая хорда  $AC$  делится линией центров пополам, т.е.  $AD = \frac{AC}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ см.}$  Из прямоугольных тр-ков  $AOD$  и  $AO_1D$  определяем  $OD$  и  $O_1D$ .

$$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ см.}$$

$O_1D = \sqrt{O_1A^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ см.}$  Искомая прямая  $OO_1 = OD + O_1D = 9 + 5 = 14 \text{ см.}$

2-й случай. Решается так же, как и в первом случае, только  $OO_1 = OD - O_1D = 9 - 5 = 4$  см.

**368.** Обозначим искомый радиус через  $r$ . В прямоугольном тр-ке  $AOC$  катеты  $AC = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$  и  $OC = OD - DC = r - h$ .

Определим радиус  $OA^2 = OC^2 + AC^2$  или  $r^2 = (r - h)^2 + \frac{a^2}{4}$ ;

упростив выражение, получим:  $8rh = a^2 + 4h^2$  откуда  $r = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$ .

**369.** 1-й случай. Параллельные прямые лежат по одну сторону центра.

Пусть  $AB = 14$  см,  $CD = 40$  см. Хорды  $AB$  и  $CD$  перпендикуляром  $OF$  делятся пополам, т.-е.  $AF = \frac{AB}{2}$  и  $CE = \frac{CD}{2}$ . Из прямоугольных тр-ков  $OAF$  и  $OCE$  определим  $OF$  и  $OE$ .

$$OF = \sqrt{OA^2 - AF^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24 \text{ см.}$$

$$OE = \sqrt{OC^2 - CE^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15 \text{ см.}$$

Искомая высота  $EF = OF - OE = 24 - 15 = 9$  см.

2-й случай. Параллельные прямые лежат по обе стороны центра.

Так же, как и в первом случае, определяем  $OF$  и  $OE$ .

$$FE = OF + OE = 24 + 15 = 39 \text{ см.}$$

**370.** Дуга  $BD$  равна дуге  $AC$  (дуги, заключенные между параллельными хордами), а потому и хорды  $AC$  и  $BD$  равны между собою. Из прямоугольного тр-ка  $ABD$ , в котором  $AB$ —диаметр,  $AD = 84$  см и  $BD = 13$  см, имеем:  $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{84^2 + 13^2} = 85$  см. Следовательно, радиус круга равен  $\frac{AB}{2} = \frac{85}{2} = 42\frac{1}{2}$  см.

**371.** 1) Пусть отрезок  $OB = 85$  см,  $AB$ —касательная и равна 36 см. Радиус  $OA$ , проведенный в точку касания  $A$ , перпендикулярен к касательной.

Из прямоугольного тр-ка  $AOB$  определим радиус  $OA$ .

$$OA = \sqrt{OB^2 - AB^2} = \sqrt{85^2 - 36^2} = 77 \text{ см.}$$

2) Касательные  $AB$  и  $BC$  равны (зад. 158).  $AB = \frac{120}{2} = 60$  см. Из прямоугольного тр-ка  $AOB$  определим искомую  $OB$ ,  $OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{11^2 + 60^2} = 61$  см.



3) Искомая хорда  $AB$  делится перпендикуляром  $OD$  пополам, т.е.  $BD = \frac{AB}{2}$ .

Из прямоугольного тр-ка  $OBC$  определим катет  $BC$ .

$$BC = \sqrt{OC^2 - OB^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24 \text{ см.}$$

На основании формулы (зад. 335),  $OB^2 = OC \cdot OD$  или  $7^2 = 25 \cdot OD$ ; откуда  $OD = \frac{49}{25}$  см;  $DC = OC - OD = 25 - \frac{49}{25} = \frac{576}{25}$  см. Из формулы  $BD^2 = OD \cdot DC$  или  $BD^2 = \frac{49}{25} \cdot \frac{576}{25}$  определим  $BD = 6,72$  см, а  $AB = 2BD = 13,44$  см.

Примечание. Полезно помнить, что  $OB \cdot BC = BD \cdot OC$  (зад. 354, п. 1), откуда  $BD = \frac{OB \cdot BC}{OC} = \frac{7 \cdot 24}{25} = 6,72$  см.

**372.** Соединим центры  $O$  и  $O_1$  прямой  $OO_1$  и проведем радиус  $O_1A$  в точку касания  $A$  прямой  $OA$ . Из прямоугольного тр-ка  $OO_1A$  определим  $OA = \sqrt{OO_1^2 - AO_1^2} = \sqrt{(R+r)^2 - r^2} = \sqrt{R^2 + 2Rr}$ . Из прямоугольного тр-ка  $OAB$  определим искомую  $AB$ :  $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{R^2 + 2Rr - R^2} = \sqrt{2Rr}$ .

**373.** 1) Пусть  $AB$  общая внешняя касательная,  $OA = 25$  см,  $O_1B = 16$  см — радиусы, проведенные в точки касания  $A$  и  $B$ . Соединим центры кругов  $O$  и  $O_1$  прямой  $OO_1$  и опустим перпендикуляр  $O_1C$  на радиус  $OA$ . Из полученного тр-ка  $OO_1C$ , у которого  $OO_1 = R + r$ , а  $OC = OA - AC = OA - O_1B = R - r$ , определим  $O_1C = AB$  (параллельные между параллельными).

$$O_1C = \sqrt{OO_1^2 - OC^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{16 \cdot 25} = 40 \text{ см.}$$

2) Так как сумма радиусов  $R + r = 40$  см, т.е. меньше расстояния центров (50 см), то одна окружность лежит вне другой. Определим длину внешней касательной  $AB$ . Как и в п. 1 этой задачи,  $AB = O_1C = \sqrt{OO_1^2 - OC^2} = \sqrt{50^2 - (27 - 13)^2} = \sqrt{50^2 - 14^2} = 48$  см.

3) Определим длину внутренней касательной. Опустим перпендикуляр  $O_1K$  на продолжение радиуса  $OA$ ;  $OK = OA + AK = OA + O_1B = R + r = 40$  см. Из прямоугольного тр-ка  $OO_1K$  определим  $O_1K$ , равную искомой общей внутренней касательной  $AB$ .

$$AB = O_1K = \sqrt{OO_1^2 - OK^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30 \text{ см.}$$

**374.** Опустим из центра  $O$  перпендикуляр на хорду  $AE$ . Угол  $BDO$  — прямой. Радиус  $OC$  перпендикулярен к касательной



$BC$ . Угол  $B$ —прямой, следовательно, 4-угольник  $ODBC$ —прямоугольник, и  $OD = BC = 12$  м. Соединим центр окружности  $O$  с точкой  $A$  окружности.  $AD = \frac{AE}{2}$  (радиус, перпендикулярный к хорде, делит хорду пополам)  $= 5$  м. Из тр-ка  $AOD$  имеем:

$$OA = \sqrt{OD^2 + AD^2} \text{ или } r = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ м.}$$

**375.** Т-рк  $ACF$  равнобедренный, так как  $\angle CAF = \angle EAF$  ( $AF$ —биссектриса) и  $\angle AFC = \angle EAF$  (накрест-лежащие, а потому  $\angle CAF = \angle AFC$ ). Отсюда и  $AC = CF$ . Подобным образом можно вывести, что и  $AC = AE$  (из тр-ка  $CAE$ ). Следовательно,  $AE = CF = AC$ . Из того, что  $AE$  равна и параллельна  $CF$ , следует, что и  $AC$  равна и параллельна  $EF$ , т.-е.  $ACEF$  есть ромб. Диагонали ромба взаимно-перпендикулярны и делятся пополам. Следовательно,

$$AO = \frac{AF}{2} = \frac{96}{2} = 48 \text{ см, } OC = \frac{110}{2} = 55 \text{ см.}$$

$AC$  определится из прямоугольного тр-ка  $AOC$ :

$$AC = \sqrt{AO^2 + OC^2} = \sqrt{48^2 + 55^2} = \sqrt{5329} = 73 \text{ см.}$$

**376.** Пусть  $BD$ —перпендикуляр к  $BC$ . Опустим высоту  $BE$ ; основание  $AC$  в точке  $E$  разделится пополам, т.-е.  $EC = \frac{AC}{2} =$

$= \frac{32}{2} = 16$  м. В прямоугольном тр-ке  $BDC$  катет  $BC = 20$  м,  $EC = 16$  м. По формуле (зад. 335)  $BC^2 = DC \cdot EC$  или  $20^2 = DC \cdot 16$ , откуда  $DC = \frac{20^2}{16} = 25$  м,  $AD = AC - DC = 32 - 25 = 7$  м.

**377.** В 4-угольнике  $DECF$  угол  $C$  прямой, углы  $DEC$  и  $CFD$  тоже прямые, следовательно,  $DECF$ —прямоугольник и  $FC = DE = 4$  см. Из прямоугольного тр-ка  $CDF$  имеем:  $CD = \sqrt{DF^2 + FC^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$ . Из прямоугольного тр-ка  $BCD$ , где  $FC = 4$  см,  $CD = \sqrt{80}$ , имеем (зад. 335):  $CD^2 = BC \cdot FC$  или  $80 = BC \cdot 4$ , откуда  $BC = 20$  см. Подобным образом из прямоугольного тр-ка  $ADC$  определится  $AC = \frac{CD^2}{EC} = \frac{80}{8} = 10$  см.

**378.** Пусть полуокружность делит гипотенузу  $AB$  на части  $AD = 4x$ ,  $BD = 5x$ ,  $AB = AD + BD = 9x$ . По условию  $AC = 2$  см. Соединим точки  $C$  и  $D$ ; угол  $CDA$  прямой, как опирающийся на диаметр, т.-е.  $CD$  перпендикулярен к гипотенузе  $AB$ . Тогда (зад. 335):  $AC^2 = AB \cdot AD$  или  $2^2 = 9x \cdot 4x$ , откуда  $x = \frac{1}{9}$ ; гипотенуза  $AB = 9x = 3$  см.



**379.** Гипотенуза  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$  см.  
Опустим перпендикуляр  $CE$  на хорду  $BD$ . Хорда разделится пополам, т.е.  $BE = \frac{BD}{2}$ , По формуле (зад. 335):  $BC^2 = AB \cdot BE$  или  $8^2 = 17 \cdot BE$ , откуда  $BE = \frac{64}{17}$ , а  $BD = \frac{2 \cdot 64}{17} = 7,53$  см.

**380.** Гипотенуза  $AB$  (черт. зад. № 379)  $= 98 + 527 = 625$  см. Катет  $BC$  определится из формулы:  $BC^2 = AB \cdot BE$  или  $BC^2 = 625 \cdot 49$  см (так как  $BE = \frac{BD}{2} = 49$  см), откуда  $BC = 175$  см.

$AC^2 = AB \cdot AE = AB(AB - BE) = 625(625 - 49) = 625 \cdot 576$ , откуда  $AC = 25 \cdot 24 = 600$  см.

**381.** Соединив точки  $B$  и  $D$ , увидим, что  $\angle ADB$  прямой (опирается на диаметр); следовательно,  $BD$  — перпендикуляр к  $AC$ . По формуле (зад. 335)  $AB^2 = AC \cdot AD$ ; но  $AB$  — диаметр  $2r$ ,  $AC = AD + DC = 32 + 18 = 50$  см, а потому  $(2r)^2 = 50 \cdot 32$ , откуда  $r = 20$  см.

**382.** Черт. зад. № 381. Пусть диаметр  $AB = 2r$ ; тогда  $BC = r$ . Проекция катетов пропорциональны квадратам катетов:  $CD : DA = BC^2 : AB^2$  или  $CD : DA = r^2 : (2r)^2 = 1 : 4$ .

**383.** Гипотенуза  $AB$  разделилась биссектрисой  $CD$  на части  $BD$  и  $AD$ , пропорциональные катетам  $BC$  и  $AC$ , т.е.  $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD} = \frac{7}{9}$ .

Проекция катетов  $BE$  и  $AE$  относятся, как квадраты катетов; следовательно  $\frac{BE}{AE} = \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{49}{81}$ .

**384.** Черт. зад. № 383.

Катеты относятся между собой, как части гипотенузы, на которые ее разделила биссектриса. Т.е.  $\frac{BC}{AC} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ .

Гипотенуза равна  $15 + 20 = 35$  см. Обозначив катет  $BC$  через  $3x$ , а  $AC$  через  $4x$ , составим равенство:  $AB^2 = (3x)^2 + (4x)^2$  или  $35^2 = 25x^2$ , откуда  $x = 7$  см;  $3x = 21$  см,  $4x = 28$  см.

**385.** Второй катет тоже  $a$ , а гипотенуза  $a\sqrt{2}$ . Катет разделится биссектрисой на части пропорционально  $a : a\sqrt{2}$  или  $1 : \sqrt{2}$ . Обозначим одну часть через  $x$ , тогда вторая часть будет  $x\sqrt{2}$ . Сумма этих частей:  $x + x\sqrt{2} = a$ , откуда  $x = \frac{a}{\sqrt{2} + 1} = a(\sqrt{2} - 1)$ ;  $x\sqrt{2} = a(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = a(2 - \sqrt{2})$ .

**386.** Второй катет и гипотенуза относятся, как  $m : n$  (свойство биссектрисы). Обозначим этот катет и гипотенузу через  $nx$  и  $mx$ . Первый катет равен  $m + n$ . Тогда  $(mx)^2 - (nx)^2 = (m + n)^2$ , откуда

$$x = \sqrt{\frac{(m+n)^2}{m^2 - n^2}} = \sqrt{\frac{m+n}{m-n}}. \text{ Искомые катет и гипотенуза равны } n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}} \text{ и } m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}.$$

**387.** Пусть  $CD$  — высота, а  $CE$  и  $CF$  — биссектрисы углов  $BCD$  и  $ACD$ . Гип-за  $AB$  равна  $\sqrt{15^2 + 20^2} = 25$  дм. Отрезки  $AD$  и  $BD$  делятся в отношении  $15^2 : 20^2$  или  $9 : 16$ . Отрезок  $AD = 25 \cdot \frac{9}{25} = 9$  дм.  $BD = 25 \cdot \frac{16}{25} = 16$  дм. Высота  $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$  дм. Рассматривая прямоугольный тр-к  $BCD$ , заметим, что биссектриса  $CE$  делит катет  $BD$  на части  $BE$  и  $ED$  в отношении  $BC : CD$ , или  $\frac{BE}{ED} = \frac{BC}{CD} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ ; но  $BD = 16$  дм, следовательно,  $BE = 16 \cdot \frac{5}{8} = 10$  дм. Таким же путем из тр-ка  $ACD$  найдем,  $AF = 5$  дм:  $EF = AB - BE - AF = 25 - 10 - 5 = 10$  дм или  $1$  м.

**388.** Угол  $KBD$  между биссектрисами двух смежных углов прямой (зад. 22). Значит, и смежный ему угол  $EBD$  тоже прямой, и тр-к  $EBD$  прямоугольный, а  $BC$  — перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу  $ED$ , и  $EC$  — проекция катета  $EB$  на гипотенузу  $ED$  (которую надо определить).

Из прямоугольного тр-ка  $ABC$  определяется  $AC$ :

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ см}; \frac{CD}{DA} = \frac{BC}{BA} \text{ или } \frac{CD}{DA} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Обозначив  $CD$  и  $DA$  через  $3x$  и  $5x$ , имеем:  $AC = CD + DA$  или  $8 \text{ см} = 3x + 5x$ , откуда:  $x = 1 \text{ см}$ ;  $CD = 3x = 3 \text{ см}$ . По формуле  $BC^2 = CE \cdot CD$  (из прямоугольного тр-ка  $EBD$ ) или  $6^2 = CE \cdot 3$ , откуда  $CE = 12 \text{ см}$ . Искомая  $ED = EC + CD = 12 + 3 = 15 \text{ см}$ .

**389.** Точка  $D$  лежит на высоте  $BE$ . В самом деле, тр-к  $ADC$  равнобедренный, так как  $\angle DAE = \angle DCE$ , как половины равных углов  $A$  и  $C$ , следовательно,  $AD = DC$ ; а геометрическое место точек, равно отстоящих от двух точек  $A$  и  $C$ , есть перпендикуляр, восстановленный из середины прямой  $AC$ .

Рассматриваем прямоугольный тр-к  $ABE$ , в котором  $AB = 10$  м,  $AE = \frac{AC}{2} = 6$  м, а искомый отрезок  $BD$  есть один из отрезков,



на которые делится катет  $BE$  биссектрисой  $AD$ ;  $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} =$   
 $= \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 м$ ;  $\frac{BD}{DE} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ . Обозначим  $BD$  и  $DE$  через  $5x$   
 и  $3x$ ; имеем:  $BE = 5x + 3x$  или  $8 м = 5x + 3x$ , откуда  $x = 1 м$ ;  
 $BD = 5x = 5 м$ .

**390.** 1) Центр вписанного круга лежит на каждой биссектрисе тр-ка (точно — на пересечении биссектрис) следовательно, и на высоте  $CD$ , служащей и биссектрисой. Касательные  $EA$  и  $AD$  равны (зад. 158);  $AD = \frac{AB}{2} = \frac{30}{2} = 15 см$ , следовательно, и  $EA =$   
 $= 15 см$ .  $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36 см$ . Тр-к  $COE$  прямоугольный ( $OE$  — радиус в точку касания  $E$  — перпендикулярен к касательной  $EC$ ); в нем катет  $OE$  — радиус вписанного круга, катет  $CE = AC - AE = 39 - 15 = 24 см$ , гипотенуза  $OC = CD -$   
 $- DO = 36 см - r$ . Зависимость между сторонами прямоугольного тр-ка  $OCE$  следующая:  $OC^2 = OE^2 + CE^2$  или  $(36 - r)^2 = r^2 + 24^2$ , откуда  $r = 10 см$ .

Примечание. Радиус вписанного круга можно найти и из подобия тр-ков  $ACD$  и  $OCE$  (угол  $ECO$  — общий): напомним пропорцию  $\frac{OE}{AD} = \frac{OC}{AC}$  или  $\frac{r}{15} = \frac{36 - r}{39}$ , откуда  $r = 10 см$ .

2) Обозначим  $OC$  и  $OD$  через  $17x$  и  $15x$ ; тогда  $CD = OC +$   
 $+ OD = 32x$ , радиус  $OE = OD = 15x$ ,

$$EC = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{(17x)^2 - (15x)^2} = 8x.$$

Касательные  $AE$  и  $AD$  равны (зад. 158) между собой;  $AE =$   
 $= AD = \frac{AB}{2} = \frac{60}{2} = 30 см$ . Поэтому  $AC = AE + EC$  или  $AC =$   
 $= 30 см + 8x$  (1). Прямоугольные тр-ки  $COE$  и  $ADC$  подобны (острый угол  $EOC$  — общий). Из подобия их имеем:  $\frac{OE}{AD} = \frac{OC}{AC}$   
 или  $\frac{15x}{30} = \frac{17x}{30 + x}$ . Упростив уравнение, получим  $x = 0,5 см$ ,  
 $OE = 15x = 7,5 см$ .

**391.** Перпендикуляр  $BC$  определится, как катет, из прямоугольного тр-ка  $ABC$ , у которого гипотенуза  $AB = 53 см$ , а катет  $AC =$   
 $= AD + DC = 8 + 20 = 28 см$ .  $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{53^2 - 28^2} =$   
 $= 45 см$ . Прямоугольные тр-ки  $BCD$  и  $ADE$  подобны, так как острый угол  $ADE$  равен  $\angle BDC$ , как вертикальный.

Из подобия тр-ков имеем:  $\frac{AE}{BC} = \frac{AD}{DC}$  или  $\frac{AE}{45} = \frac{8}{20}$ ,

откуда  $AE = 18$  см.

**392.** 1) Прямоугольные тр-ки  $BDC$  и  $ACE$  подобны, так как у них общий острый угол  $C$ .

Из подобия треугольников следует:  $\frac{AE}{BD} = \frac{AC}{BC}$ .

Но  $BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$  см.

Пропорция переписывается так:  $\frac{AE}{20} = \frac{30}{25}$ , откуда  $AE = 24$  см.

2) Дано:  $BD = 3$  см,  $AE = 4$  см. Как и в п. 1 этой задачи,  $\frac{AE}{BD} = \frac{AC}{BC}$ . Обозначим  $AC$  через  $2x$ , тогда  $BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} =$

$= \sqrt{9 + x^2}$ . Пропорция переписывается так:  $\frac{4}{3} = \frac{2x}{\sqrt{9 + x^2}}$ .

Возводим обе части уравнения в квадрат:  $\frac{16}{9} = \frac{4x^2}{9 + x^2}$ ,

откуда  $x = \sqrt{\frac{144}{20}}$ ;  $AC = 2x = \sqrt{28,8}$  см;  $AB = BC = \sqrt{9 + x^2} = \sqrt{16,2} = 1,8\sqrt{5}$  см.

3) Сторона ромба определится из прямоугольного тр-ка  $AOB$  (диагонали ромба взаимно-перпендикулярны и делятся пополам).

$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{\left(\frac{14}{2}\right)^2 + \left(\frac{48}{2}\right)^2} = \sqrt{625} = 25$  см. Тре-

угольник  $ABD$ —равнобедренный ( $AB = AD = 25$  см) и высота  $BE$  определится по п. 1 этой задачи:  $\frac{BE}{AO} = \frac{BD}{AD}$  или  $\frac{BE}{24} = \frac{14}{25}$ ,

$BE = 13,44$  см.

**393.** 1) Пусть  $BD = DA = \frac{AB}{2} = 17$  м и  $DE$  перпендикулярен к

$AB$ ;  $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$  см.

Прямоугольные тр-ки,  $ABC$  и  $ADE$  подобны, так как  $\angle A$  общий. Из подобия тр-ков следует:  $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC}$  или  $\frac{ED}{16} = \frac{17}{30}$ ,

откуда  $ED = 9,07...$  м.

2) Пусть точка  $D$ —середина радиуса  $OC$ , перпендикулярного к диаметру  $AB$ . Соединив хордой точки  $B$  и  $E$ , получим прямо-



угольный тр-к  $ABE$  (угол  $E$  прямой, ибо опирается на диаметр  $AB$ ). Прямоугольные тр-ки  $AOD$  и  $ABE$  подобны, ибо имеют общий острый угол  $A$ . Из подобия этих тр-ков имеем:  $\frac{AE}{OA} = \frac{AB}{AD}$ , но

$$OA = r, AB = 2r, AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r}{2} \sqrt{5}.$$

Пропорция переписывается так:  $\frac{AE}{r} = \frac{2r}{\frac{r}{2} \sqrt{5}}$ , откуда  $AE = \frac{4r}{\sqrt{5}}$ .

**394.** Углы  $ABC$  и  $BED$  равны, как соответственные ( $AB \parallel DE$ ). Следовательно, прямоугольные тр-ки  $ABC$  и  $BDE$  подобны, а потому имеет место пропорция  $\frac{BE}{AB} = \frac{BD}{AC}$ ; но  $BD = BC = 12$  см, а  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$  см. Следовательно, пропорция переписывается так:  $\frac{BE}{20} = \frac{12}{16}$ , откуда  $BE = 15$  см.

**395.** Касательные  $AB$  и  $BC$  равны между собою (зад. 158). Проведя в точки касания радиусы  $OA$  и  $OC$ , получим равные прямоугольные тр-ки  $ABO$  и  $BCO$  ( $AB = BC$ ,  $OA = OC$ , как радиусы). Если перегнем чертеж по прямой  $OB$ , то  $AD$  совпадет с  $DC$ , т.-е.  $AD = DC = \frac{AC}{2} = 60$  см и  $\angle ADB$  — прямой (ибо  $\angle ADB$  совпадет с  $\angle BDC$ ). Из прямоугольного тр-ка  $ABD$  определим  $BD$ :  $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{156^2 - 60^2} = 144$  см. Искомый радиус  $OA = r$  определим из прямоугольного тр-ка  $ABO$  таким путем: определим раньше  $OB$ ;  $AB^2 = OB \cdot BD$ ; или  $156^2 = OB \cdot 144$ , откуда  $OB = \frac{156^2}{144} = 169$  см, а  $OA = \sqrt{OB^2 - AB^2} = \sqrt{169^2 - 156^2} = 65$  см.

**396.** Проведя высоту  $CF$  и среднюю линию  $KL$ , равную  $\frac{BC + AD}{2} = \frac{17 + 25}{2} = 21$  см, получим два подобных прямоугольных тр-ка  $CDF$  и  $KEL$ , так как  $\angle FCD = \angle KLE$  ( $KL \perp CF$  и  $EL \perp CD$ ). Из подобия этих тр-ков имеем:  $\frac{EL}{CD} = \frac{KL}{CF}$ ; но  $CD = 10$  см,  $KL = 21$  см,  $CF = \sqrt{CD^2 - FD^2} = \sqrt{CD^2 - (AD - AF)^2} = \sqrt{CD^2 - (AD - BC)^2} = \sqrt{10^2 - (25 - 17)^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$  см. Пропорция переписывается так:  $\frac{EL}{10} = \frac{21}{6}$ , откуда  $EL = 35$  см.

**397.** Вследствие параллельности  $BC$  и  $DE$ , имеем пропорцию:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BD}; \text{ но } \frac{AD}{BD} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{4^2}{5^2} \text{ (проекции катетов на гипотенузу пропорциональны квадратам катетов).}$$

$$\text{Следовательно, } \frac{AE}{EC} = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}.$$

**398.** Как и в зад. 397, напомним пропорцию:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{75^2}{100^2} = \frac{9}{16}. \text{ Из параллельности } DE \text{ и } BC \text{ следует, что}$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BD} = \frac{9}{16}.$$

Обозначив  $AE$  через  $9x$ , а  $EC$  через  $16x$ , составим уравнение:  $AE + EC = 75$  см или  $9x + 16x = 75$  см, откуда  $x = 3$  см;  $DF = EC = 16x = 48$  см. Подобным образом найдем  $DE = 36$  см.

**399.** Пусть  $ABC$  и  $ABD$ —два равнобедренных тр-ка и  $AB = BC = BD$ , а  $\angle ABC + \angle ABD = 180^\circ$ . Очевидно, если приложить тр-ки друг к другу, получится фигура, указанная на чертеже, так как  $DC$ —прямая (по известной обратной теореме о сумме смежных углов). Образовавшийся треугольник  $ADC$ —прямоугольный, так как  $AB$ —медиана  $DC$  (зад. 228)—равна  $\frac{DC}{2}$  (до-

казать это можно, описав окружность радиусом, равным  $AB$  из середины  $DC$ ; тогда  $\angle A$  прямой, ибо опирается на диаметр  $DC$ ). Так как, по условию,  $AC : AD = 9 : 40$ , то, обозначив  $AC$  через  $9x$ ,  $AD$ —через  $40x$ , перепишем равенство  $AC^2 + AD^2 = DC^2$  в виде:  $(9x)^2 + (40x)^2 = (2 \cdot 41)^2$ . Получим:  $x = 2$ ;  $AC = 9x = 18$  см,  $AD = 40x = 80$  см.

**400.** 1) Пусть  $BE$ —высота,  $BD$ —медиана (точка  $D$ —середина основания  $AC$ ). Отрезок  $ED = \sqrt{BD^2 - BE^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$  м,  $AD = DC = \frac{AC}{2} = 30$  м, а потому  $AE = AD - ED = 30 - 5 = 25$  м,

$EC = ED + DC = 5 + 30 = 35$  м. Из прямоугольного тр-ка  $AEB$  определяем  $AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{25^2 + 12^2} = \sqrt{769} = 27,7$  м. Из прямоугольного тр-ка  $BCE$  определяем  $BC = \sqrt{EC^2 + BE^2} = \sqrt{35^2 + 12^2} = 37$  м.

2) Пусть высота  $BE = 40x$ , а медиана  $BD = 41x$ , тогда гипотенуза  $AC = 2 \cdot 41x = 82x$  (зад. 228). Как и в п. 1 этой задачи,  $DE = \sqrt{BD^2 - BE^2} = \sqrt{(41x)^2 - (40x)^2} = 9x$ . Таким образом  $AE = AD - DE = 41x - 9x = 32x$ ,  $CE = 41x + 9x = 50x$ .



Отношение проекций катетов на гипотенузу равно отношению квадратов катетов, т.е.  $\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AE}{EC} = \frac{32x}{50x}$  или  $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$ .

**401.** Примечание: Полученный 4-угольник  $KLMN$ —квадрат. В самом деле, в прямоуг. тр-ках  $ABH$  и  $AGD$  катеты  $AB$  и  $AH$  соответственно равны  $AD$  и  $GD$ , след.,  $\angle GAD = \angle ABH$ . Но  $\angle GAD + \angle BAG = d$ , след., и  $\angle ABH + \angle BAG = d$ , а потому в тр-ке  $BAN$  угол  $ANB = 2d - (\angle ABH + \angle BAG) = 2d - d = d$ . Следовательно, и смежный угол  $BNG = d$ . Так же доказывается, что и остальные углы 4-угольника  $KLMN$ —прямые.

Рассмотрим прям-ый тр-к  $ABH$ . Так как  $AB = a$ ,  $AH = \frac{3}{4}a$ , то гипотенуза  $BH = \sqrt{a^2 + (\frac{3}{4}a)^2} = \frac{5}{4}a$ . Прям-ые тр-ки  $ANH$  и  $BEK$  равны, так как гипотенузы  $BE$  и  $AH$  равны, а также равны и острые углы  $ABH$  и  $GAD$ ; следовательно,  $AN = BK$ , а искомая сторона  $KN = BH - NH - BK = BH - NH - AN$ . Но  $BH = \frac{5}{4}a$ ,

$$NH = \frac{AH^2}{BH} = \frac{\left(\frac{3}{4}a\right)^2}{\frac{5}{4}a} = \frac{9}{20}a \text{ (по теореме „катет есть средняя про-} \\ \text{порциональная между гипотенузой и проекцией данного катета“;}$$

рассматриваем тр-к  $ABH$ );  $AN = \sqrt{AH^2 - NH^2} = \sqrt{(\frac{3}{4}a)^2 - (\frac{9}{20}a)^2} = \frac{3}{5}a$ . Окончательно,  $KN = \frac{5}{4}a - \frac{9}{20}a - \frac{3}{5}a = \frac{a}{5}$ .

**402.** Решается, как зад. 401.  $AF = \frac{BF}{2}$ ; (зад. 67) обозначим  $AF$

через  $x$ , тогда  $BF = 2x$ ,  $AB = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3} = a$ , а  $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ .

Искомая сторона квадрата  $KM = BF - FM - BK = BF - FM - AM$ . (Из равных тр-ков  $EBK$  и  $AMF$  следует, что  $BK = AM$ ). Отрезки  $FM$  и  $AM$  определяются, как в зад. 401.

$$FM = \frac{AF^2}{BF} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}};$$

$$AM = \sqrt{AF^2 - FM^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}.$$

Следовательно,  $KM = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{a}{2\sqrt{3}} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)$ .

**403.** Примечание. Квадрат образуется при условии  $b \geq \frac{a}{2}$ ; в противном случае, прямые внутри прямоугольника не пересекаются.

4-угольник  $KLMN$  — квадрат. Доказывается, как и в задаче № 401. Пусть  $AD = a$ ,  $AB = b$ . Искомая  $KN = BF - BK - NF$ . Следовательно, для решения задачи надо определить  $BF$ ,  $BK$  и  $NF$ .

Прям-ый тр-к  $ABF$  — равнобедренный, так как  $\angle ABF = \frac{d}{2}$  следовательно,  $AF = AB = b$ ,  $BF = b\sqrt{2}$  (как гипотенуза равнобедренного прямоуг. тр-ка с катетом  $b$ ).  $BK = \frac{BF}{2} = \frac{b}{2}\sqrt{2}$ . (Высота  $AK$  в равнобедренном тр-ке  $ABF$  делит основание  $BF$  пополам).

Отрезок  $NF$  найдем из равнобедренного прямоуг. тр-ка  $GNF$ .

Пусть  $NF = x$ , тогда и  $NG = x$ , а  $GF = x\sqrt{2}$ . С другой стороны,  $GF = AF - AG$ . Но  $AF = AB = b$ ;  $AG = AD - GD = AD - CD = a - b$ . Или  $GF = b - (a - b) = 2b - a$ . Т. к.  $GF = x\sqrt{2} = 2b - a$  то  $x = \frac{2b - a}{\sqrt{2}}$ . Следовательно,  $KN = BF - BK - NF =$

$$= b\sqrt{2} - \frac{b}{2}\sqrt{2} - \frac{2b - a}{\sqrt{2}} = \frac{a - b}{2}\sqrt{2}.$$

**404.** Перенесем хорду  $CD$  в положение  $AD_1$ ; тогда  $\sphericalangle AD_1 = \sphericalangle CD$  (равные хорды стягивают равные дуги);  $BD_1$  будет диаметром, ибо сумма дуг  $AB$  и  $CD$ , а значит,  $AB$  и  $AD_1$  равна  $180^\circ$ .

Из прямоуг. тр-ка  $ABD_1$  имеем:

$$AB^2 + AD_1^2 = BD_1^2 \text{ или } 12^2 + 35^2 = (2R)^2,$$

$$\text{откуда } R = \sqrt{\frac{1369}{4}} = \frac{37}{2} = 18,5 \text{ см.}$$

**405.** Пусть хорды  $AB$  и  $CD$  пересекаются под прямым углом; тогда сумма дуг  $AC$  и  $BD$  равна  $180^\circ$ .

По зад. 404,  $AC^2 + BD^2 = (2R)^2$ . Но  $AC^2 = AO^2 + OC^2$ , а  $BD^2 = OB^2 + OD^2$ , так как тр-ки  $AOC$  и  $BOD$  — прямоугольные. Следовательно,  $AO^2 + OC^2 + OB^2 + OD^2 = (2R)^2$ .

**406.** Проведем в тр-ке  $ABC$  высоту  $BD$  и опустим из центра  $O$  описанного круга перпендикуляр  $OE$  на боковую сторону  $AB$ . Сторона  $AB$  разделится в точке  $E$  пополам (радиус, перпендикулярный хорде, делит хорду пополам), т. е.  $BE = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$ . Пря-



моуг. тр-ки  $ABD$  и  $OBE$  подобны, так как острый угол  $ABD$ —общий для обоих тр-ков. Из подобия этих тр-ков следует:

$$\frac{OB}{AB} = \frac{BE}{BD} \text{ или (принимая во внимание, что } BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} =$$

$$= \sqrt{5^2 - 3^2} = 4) : \frac{R}{5} = \frac{2}{4}, \text{ откуда } R = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8} \text{ см.}$$

$$2) \text{ Как и в п. 1, } \frac{OB}{AB} = \frac{BE}{BD} \text{ или } \frac{R}{13} = \frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{13^2 - 12^2}},$$

откуда  $R = 16,9 \text{ м.}$

**407.** Центр вписанного в ромб круга лежит на пересечении диагоналей. В самом деле, высоты, опущенные из точки пересечения диагоналей ромба на его стороны, равны между собою (вследствие равенства прямоуг. тр-ков  $EOD$ ,  $OFD$ ,  $GOB$  и  $KOB$ —т. к. в этих тр-ках гипотенузы  $BO = OD$ , а острые углы  $OBK$ ,  $OBG$ ,  $ODE$  и  $ODF$  равны, как половины тупых углов ромба). Следовательно, если впишем в ромб круг радиусом, равным одной из этих высот, напр.,  $OK$ , из точки пересечения диагоналей, то круг будет касаться всех сторон ромба, т.-е. окажется вписанным кругом.

Радиус  $OE$  вписанного круга можно определить, как высоту, опущенную из вершины прямого угла прямоуг. тр-ка  $AOD$  на гипотенузу  $AD$ . По зад. 335 и 334  $AD = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25 \text{ м;}$

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AO^2}{OD^2} = \frac{24^2}{7^2} = \frac{576}{49}; \text{ следов., } AE = 25 \cdot \frac{576}{576+49} = \frac{576}{25} \text{ м,}$$

$$ED = 25 \cdot \frac{49}{576+49} = \frac{49}{25} \text{ м; } OE = \sqrt{AE \cdot ED} = \sqrt{\frac{576}{25} \cdot \frac{49}{25}} =$$

$$= \frac{24 \cdot 7}{25} = 6,72. \text{ Или иначе, по зад. 354, } OE = \frac{AO \cdot OD}{AD} = \frac{24 \cdot 7}{25} = 6,72.$$

**408.** См. зад. № 217.

Пусть  $AC = 84 \text{ см, } BC = 13 \text{ см.}$  Тогда  $AB = \sqrt{84^2 + 13^2} = 85 \text{ см.}$   $AD = AE$  и  $FB = EB$  (зад. 158). Следовательно,  $AB = AE + EB = AD + FB = (AC - CD) + (BC - CF)$ ; 4-угольник  $CDOF$ —квадрат, сторона которого равна радиусу вписанного круга, а потому  $DC = CF = r$ .

Итак,  $AB = (AC - r) + (BC - r)$  или  $85 = 84 - r + 13 - r$ , откуда  $r = 6 \text{ см.}$

**409.** Пусть  $R$  и  $r$  радиусы кругов. Проведем  $O_1C$  параллельно общей внешней касательной  $AB$ , тогда  $AC = BO_1$  (отрезки параллельных между параллельными:  $AB \parallel O_1C$  и  $AO \parallel O_1B$ , как радиусы, перпендикулярные к общей касательной  $AB$ ). Следовательно,  $OC = OA - AC = OA - O_1B = R - r$ . Проведем  $OF \parallel DE$  и  $O_1F \parallel OD$ , получим тр-к  $OO_1F$ , в котором  $O_1F = O_1E + EF = O_1E + OD = R + r$ . Итак,

$$R - r = OC = \sqrt{OO_1^2 - O_1C^2} = \sqrt{OO_1^2 - AB^2} = \sqrt{65^2 - 63^2} = 16 \text{ см.}$$

$$\begin{aligned} R + r = O_1F &= \sqrt{OO_1^2 - OF^2} = \sqrt{OO_1^2 - DE^2} = \\ &= \sqrt{65^2 - 25^2} = 60 \text{ см.} \end{aligned}$$

По сумме и разности радиусов находим  $R = 38 \text{ см}$ ,  $r = 22 \text{ см}$ .

**410.** 1-й случай. Центр круга лежит вне параллельных хорд.

Опустим из центра  $O$  перпендикуляр на хорду  $AB$ . Очевидно,  $EF$  равно расстоянию между хордами —  $22 \text{ см}$ . Соединив точку  $O$  с концами хорд, получим два прям-ых тр-ка  $AOE$  и  $COF$ .

Из тр-ка  $AOE$  имеем:  $AO^2 = AE^2 + OE^2$ , а из тр-ка  $COF$  таким же образом  $CO^2 = CF^2 + OF^2$ ; но  $AO = CO = R$ , следовательно,  $AE^2 + OE^2 = CF^2 + OF^2$ ;  $AE = \frac{AB}{2} = 20 \text{ см}$ ;  $CF = \frac{CD}{2} = 24 \text{ см}$ ;  $OF = OE - EF = OE - 22 \text{ см}$ .

Подставив в равенство указанные значения, получим:

$$\begin{aligned} 20^2 + OE^2 &= 24^2 + (OE - 22)^2; \\ 20^2 + OE^2 &= 24^2 + OE^2 - 2 \cdot 22 \cdot OE + 22^2, \\ \text{отсюда } OE &= \frac{24^2 + 22^2 - 20^2}{2 \cdot 22} = 15 \text{ см.} \end{aligned}$$

Из прямоугольного тр-ка  $AOE$  определяем радиус  $OA$ .

$$OA = \sqrt{OE^2 + AE^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ см.}$$

2-й случай. Центр круга лежит между параллельными хордами. Пусть  $AB = 40 \text{ см}$ ,  $C_1D_1 = 48 \text{ см}$ ,  $EF_1 = 22 \text{ см}$ .

Из прям-го тр-ка  $AOE$  имеем:

$$OA^2 = AE^2 + OE^2 \quad (1).$$

А из прям-го тр-ка  $C_1OF_1$ :

$$OC_1^2 = C_1F_1^2 + OF_1^2 \quad (2).$$

Но  $OA = OC_1$ , как радиусы данной окружности,

$$AE = \frac{AB}{2} = 20 \text{ см}, \quad C_1F_1 = \frac{C_1D_1}{2} = 24 \text{ см}.$$



Следовательно, из равенства (1) и (2) получаем:

$AE^2 + OE^2 = C_1F_1^2 + OF_1^2$  или, подставив вместо  $AE$  и  $C_1F_1$  их значения, получим  $20^2 + OE^2 = 24^2 + OF_1^2$ , но  $OE = EF_1 - OF_1 = 22 - OF_1$ ; следовательно,  $20^2 + (22 - OF_1)^2 = 24^2 + OF_1^2$ . По упрощении последнего равенства, получим  $44 \cdot OF_1 = 308$ , откуда  $OF_1 = 7$ .

Искомый радиус определится из прямоугольного тр-ка  $OC_1F_1$ :

$$OC_1^2 = C_1F_1^2 + OF_1^2 = 24^2 + 7^2, \text{ откуда } OC_1 = 25.$$

**411.** 1-й случай. Центр окружности лежит вне трапеции.

Пусть  $ABCD$  данная трапеция. Опустим из вершины  $C$  высоту  $CE$  на нижнее основание  $AB$ . В прямоугол-ом тр-ке  $ACE$  имеем:

$$AE = \frac{AB - CD}{2} = \frac{80 - 60}{2} = 10 \text{ м.}$$

Величину  $CE$  найдем, как катет прямоугол. тр-ка  $ACE$ .  $CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \text{ м.}$  Зная величины хорд и расстояние между ними ( $CE = 24 \text{ м.}$ ), найдем и радиус круга, как в зад. 410.  $R = 40,08...$

2-й случай. Центр круга лежит внутри трапеции. Искомый радиус определяется, как в зад. 410.

**412.** Высота трапеции равна диаметру вписанного круга. Опустим перпендикуляр  $BE$  на основание  $AD$ .

В прямоугол. тр-ке  $ABE$  гипотенуза  $AB = \frac{BC + AD}{2} = \frac{36 + 100}{2} = 68 \text{ см}$  (свойство описанного около круга 4-угольника: суммы противоположных сторон равны между собою);  $AE = \frac{AD - BC}{2} = \frac{100 - 36}{2} = 32 \text{ см.}$   $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{68^2 - 32^2} = 60 \text{ см.}$  Радиус круга  $R = \frac{BE}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ см.}$

**413.** Пусть нижнее основание трапеции  $x$ , верхнее  $y$ . Сумма боковых сторон трапеции равна сумме оснований (свойство описанного около круга 4-угольника), т.е.  $x + y = 2 \cdot 25 = 50 \text{ см.}$  Из прямог-го тр-ка  $ABE$  (чертеж задачи № 412)  $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{25^2 - 24^2}$  (т. к. высота трапеции равна диаметру вписанного круга)  $= 7$ , т.е.  $\frac{x - y}{2} = 7$  или  $x - y = 14$ . По сумме и разности оснований определяем эти основания:  $x = 32 \text{ см, } y = 18 \text{ см.}$

**414.** Пусть верхнее и нижнее основания трапеции равны  $mx$  и  $nх$ . Боковая сторона  $AB$  (черт. зад. № 412) равна  $\frac{m+n}{2} \cdot x$ ;

$$AE = \frac{m-n}{2} \cdot x. \text{ Тогда } BE^2 = AB^2 - AE^2 \text{ или}$$

$$(2r)^2 = \frac{(m+n)^2}{2^2} \cdot x^2 - \frac{(m-n)^2}{2^2} \cdot x^2 \text{ или } 4r^2 = mn x^2,$$

$$\text{откуда } x = \frac{2r}{\sqrt{mn}}, \text{ а } mx = \frac{2mr}{\sqrt{mn}}, \text{ } nx = \frac{2nr}{\sqrt{mn}}.$$

**415.** Проведем радиус  $OB$  в точку касания  $B$ . Касательная  $DE$  в точке  $M$  делится пополам (что следует из равенства прямоугольн. тр-ков  $AMD$  и  $AME$ , имеющих равные острые углы  $MAD$  и  $MAE$  и общий катет  $AM$ ).

Прямоугольн. тр-ки  $AOB$  и  $AMD$  подобны, ибо у них общий острый угол  $BAO$ .

На основании подобия этих тр-ков напишем пропорцию:  $\frac{DM}{OB} = \frac{AM}{AB}$ . Но  $OB = 15 \text{ см}$  (как радиус),  $AM = AO - OM = 39 - 15 = 24 \text{ см}$ ,  $AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36 \text{ см}$ . Пропорция переписывается так:  $\frac{DM}{15} = \frac{24}{36}$ , откуда  $DM = 10 \text{ см}$ . Следовательно,  $DE = 2 \cdot DM = 2 \cdot 10 = 20 \text{ см}$ .

**416.** Пусть  $a$  и  $b$  катеты,  $c$  гипотенуза,  $r$  радиус вписанного круга. По зад. 217,  $r = \frac{a+b-c}{2}$ . Но  $c = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ см}$ ; следовательно,  $r = \frac{15+20-25}{2} = 5 \text{ см}$ .

Искомое расстояние  $OK$  равно  $LD$  ( $OKLD$ —прямоугольник, т. к. углы  $OKD$ ,  $OLD$ ,  $KDL$ —прямые, а потому и 4-й угол  $KOL$  прямой;  $OK$  и  $LD$  противоположные стороны прямоугольника  $OKLD$ ).

Но  $LD = BL - BD$ ;  $BL = BM$  (зад. 158)  $= BC - r = 15 - 5 = 10 \text{ см}$ ,  $BD = 9 \text{ см}$  (по зад. 335,  $BD = \frac{BC^2}{AB} = \frac{15^2}{25} = 9 \text{ см}$ ). Следовательно,  $OK = LD = BL - BD = 10 - 9 = 1 \text{ см}$ .

**417.** Пусть  $CK = n$ ,  $CL = m$ . Соединив точки  $K$  и  $L$ , получим диаметр  $KL$ , так как на него опирается прямой угол  $C$ . Но диаметр  $KL = \sqrt{CK^2 + CL^2} = \sqrt{n^2 + m^2}$ . Значит, и  $CD$  (как диаметр)  $= \sqrt{m^2 + n^2}$ . Соединив точки  $L$  и  $K$  с  $D$ , получим прямо-



угольник  $CKDL$ , так как все углы, как опирающиеся на диаметры, прямые. Следовательно,  $KD$ —перпендикулярна к  $BC$ . Из прямоугольного треугольника  $BCD$  имеем:  $CD^2 = BC \cdot CK$  или  $m^2 + n^2 = BC \cdot n$ , откуда искомым катет  $BC = \frac{m^2 + n^2}{n}$ .

Подобным же образом из прямоугольного треугольника  $ACD$  определим вторую искомую прямую  $AC = \frac{m^2 + n^2}{m}$ .

Подставив в полученные выражения вместо  $m$  и  $n$  их значения 12 и 18, получим:  $BC = \frac{12^2 + 18^2}{18} = 26$ ,  $AC = \frac{12^2 + 18^2}{12} = 39$ .

**418.** Пусть на гипотенузе  $AB$  взята точка  $E$  так, что  $EF = ED = x$ . По условию  $BC = a$ ,  $CD = b$ .

Опустим перпендикуляр  $EG$  на катет  $BC$ , тогда  $EG = CF$  (вследствие образовавшегося прямоугольника  $EGCF$ ).

Из прямоугольного треугольника  $EGD$  имеем:

$DE^2 = EG^2 + GD^2$ ; но  $EG = BG$  (треугольник  $EGB$ —равнобедренный, т. к.  $\angle B = \frac{d}{2}$ )  $= BC - CG = BC - EF = a - x$ ;  $GD = GC - CD = EF - CD = x - b$ .

Следовательно, равенство  $DE^2 = EG^2 + GD^2$  перепишется так:  $x^2 = (a - x)^2 + (x - b)^2$ , откуда, по упрощении, получим:  $x^2 - 2x(a + b) + a^2 + b^2 = 0$ . По формуле квадратного уравнения  $x = a + b \pm \sqrt{2ab}$ . Так как  $EF$  меньше  $BC$ , т. е.  $x < a$ , то пригоден только корень  $x = a + b - \sqrt{2ab}$ .

**419.** Пусть  $AB = a$ ,  $BC = b$ , искомый радиус обозначим через  $R$ . Проведем линии, согласно чертежу.

Как видно из чертежа,  $OK = FL - FO - KL = a - 2R$ ;  $O_1K = MN - MK - O_1N = b - 2R$ ;  $OO_1 = 2R$ . Из прямоугольного треугольника  $OKO_1$  имеем:  $OO_1^2 = OK^2 + O_1K^2$  или  $(2R)^2 = (a - 2R)^2 + (b - 2R)^2$  или  $4R^2 = a^2 + 4R^2 - 4aR + b^2 + 4R^2 - 4bR$ ; по упрощении получаем:

$$4R^2 - 4R(a + b) + a^2 + b^2 = 0.$$

По формуле квадратного уравнения, находим искомое  $R$ :

$$R = \frac{a + b \pm \sqrt{2ab}}{2}.$$

Так как по чертежу видно, что диаметр круга меньше каждой из сторон прямоугольника, т.-е.  $2R < a$  и  $2R < b$ , то пригоден только корень

$$R = \frac{a + b - \sqrt{2ab}}{2}.$$

Примечание. Данная задача возможна при условии, когда  $a$  и  $b$  (каждая в отдельности) больше  $2R$  и меньше  $4R$ .

**420.** Пусть  $AC = 75$  см,  $BC = 100$  см; тогда  $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{100^2 + 75^2} = 125$  см;  $AD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{75^2}{125} = 45$  см (задача 335),  $BD = AB - AD = 125 - 45 = 80$  см.

Из тр-ков  $ACD$  и  $BCD$  (как в зад. 417) получим:

$$AE = \frac{AD^2}{AC} = \frac{45^2}{75} = 27 \text{ см}; \quad BF = \frac{BD^2}{BC} = \frac{80^2}{100} = 64 \text{ см}.$$

**421.** 1-й способ. Пусть  $AB$  — общая внешняя касательная и  $C$  — точка касания кругов. Проведя общую внутреннюю касательную  $DC$ , пересекающую  $AB$  в точке  $D$ , соединим точку  $D$  с центрами  $O$  и  $O_1$  и центры  $O$  и  $O_1$  между собой. Тогда  $CD$  есть средняя пропорциональная между радиусами.

Действительно, линия  $OD$  делит описанный угол  $ADC$  пополам, а линия  $O_1D$  — угол  $CDB$  пополам. Но сумма смежных углов  $ADC + CDB = 2d$ ; а потому,  $\angle ODO_1 = \frac{ADC}{2} + \frac{CDB}{2} = d$ .

Следовательно, тр-к  $ODO_1$  — прямоугольный, и  $DC$  (касательная, перпендикулярная к линии центров) есть высота на гипотенузу.

Значит  $CD^2 = OC \cdot O_1C$  или  $CD^2 = R \cdot r$ . Но  $CD = AD$  и  $CD = BD$  (зад. 158), а потому  $AB = 2CD$  или  $CD = \frac{AB}{2}$ .

Подставив в равенство  $CD^2 = OC \cdot O_1C$ , вместо  $CD = \frac{AB}{2}$ ,

$OC = R$  и  $O_1C = r$ , получим  $\frac{AB^2}{4} = Rr$  или  $AB^2 = 2R \cdot 2r$ .

2-й способ. Проведя в точки касания  $A$  и  $B$  радиусы  $OA$  и  $O_1B$ , и параллельную  $O_1C$  к касательной, получим прямоугольный тр-к  $OO_1C$ , в котором  $OO_1 = R + r$ ,  $OC = OA - AC = OA - O_1B = R - r$ , а  $O_1C = AB$ .

Из прямоугольного тр-ка  $OO_1C$  имеем:

$O_1C^2 = OO_1^2 - OC^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr = 2R \cdot 2r$ , что и требовалось доказать.



**422.** Пусть  $O$  и  $O_1$  круги вписанный и невписанный. Обозначим их радиусы через  $4x$  и  $9x$ . Вследствие равнобедренности тр-ка  $ABC$  основание  $AC$  в точке  $D$  делится пополам, т.-е.  $AD = DC = \frac{60}{2} = 30$  см. Следовательно, и  $KC = DC = 30$  см, а  $CE = KC = 30$  см. (зад. 158); отрезок же  $DE = DC + CE = 60$  см. Проведем прямую  $OL$  параллельно  $DE$ . Получим прямоугольный тр-к  $OO_1L$  ( $OD$  и  $O_1E$  перпендикулярны к  $DE$ , как радиусы, проведенные в точки касания), в котором гипотенуза  $OO_1 = 4x + 9x = 13x$ , катет  $O_1L = O_1E - LE = O_1E - OD = 9x - 4x = 5x$ ,  $OL = DE = 60$  см. Имеем:  $OO_1^2 = OL^2 + O_1L^2$  или  $(13x)^2 = 60^2 + (5x)^2$ , или  $144x^2 = 3600$ , откуда  $x = 5$  см. Искомая  $OO_1 = 13x = 65$  см.

**423.** По условию  $\angle BAD + \angle BCD = d$ , но в прямоугольном тр-ке  $ABD$  сумма острых углов  $\angle BAD + \angle ABD = d$ ; следоват.,  $\angle BCD = \angle ABD$ , а потому прямоугольные тр-ки  $ABD$  и  $BCD$ , имеющие по одному равному острому углу, подобны. Из подобия этих тр-ков следует:  $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC}$ , откуда  $BD^2 = AD \cdot BC = ab$  или  $BD = \sqrt{ab}$ . Искомые боковые стороны  $AB$  и  $CD$  определяются, как гипотенузы прямоугольных тр-ков  $ABD$  и  $BCD$ :

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{a^2 + ab} = \sqrt{a(a+b)};$$

$$CD = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{b^2 + ab} = \sqrt{b(a+b)}.$$

## 2. Косоугольный треугольник.

**424.** Пусть даны:  $AC$ ,  $AB$  и  $BD$ .

1-й случай.  $BC$  лежит против острого угла. Тогда, по формуле (черт. а):

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD} = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AB(AB - BD)}.$$

По этой формуле решаются 1-й и 2-й примеры, так как проекции  $BD(3,8$  и  $2)$  меньше основания  $AB$  ( $5$  и  $3$ ).

Подставим числовые значения:

$$1) BC = \sqrt{6^2 + 5^2 - 2 \cdot 5(5 - 3,8)} = 7$$

$$2) BC = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \cdot 3(3 - 2)} = \sqrt{7}.$$

2-й случай.  $BC$  лежит против тупого угла. Тогда, по формуле (черт. б):

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 + 2AB \cdot AD} = \sqrt{AC^2 + AB^2 + 2AB(BD - AB)}.$$

По этой формуле решаются 3-й и 4-й примеры, так как проекции  $BD$  ( $11$  и  $3$ ) больше основания  $AB$  ( $8$  и  $2$ ).

Подставим числовые значения:

$$3) BC = \sqrt{12^2 + 8^2 + 2 \cdot 8(11 - 8)} = 16.$$

$$4) BC = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2 \cdot 2(3 - 2)} = \sqrt{12}.$$

Примечание. Заметим, что те же выражения получим, если подставим числовые величины для 3 и 4 примеров в формулу первую. Действительно,

$$\sqrt{12^2 + 8^2 - 2 \cdot 8(8 - 11)} = 16 \quad \text{и} \quad \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2(2 - 3)} = \sqrt{12}.$$

**425.** Обозначим основание тр-ка через  $a$ , боковые стороны — через  $b$  и  $c$ , а проекцию  $b$  на  $a$  — через  $p$ .

1) Если  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ap$ , т.-е. когда квадрат одной стороны меньше суммы квадратов двух других сторон, то против этой стороны лежит острый угол.

2) Если  $c^2 = a^2 + b^2$ , т.-е. когда квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то против этой стороны лежит прямой угол.

3) Если  $c^2 = a^2 + b^2 + 2ap$ , т.-е. когда квадрат одной стороны больше суммы двух других сторон, то против данной стороны лежит тупой угол.

Для решения вопроса, будет ли тр-к тупоугольным, прямоугольным или остроугольным, надо определить квадрат наибольшей стороны — по отношению к сумме квадратов остальных сторон.

$$1) \quad 4^2 > 2^2 + 3^2 \text{ — тр-к тупоугольный}$$

$$2) \quad 5^2 = 3^2 + 4^2 \text{ — тр-к прямоугольный}$$

$$3) \quad 6^2 < 5^2 + 4^2 \text{ — тр-к остроугольный}$$

$$4) \quad 18^2 < 15^2 + 10^2 \text{ — тр-к остроугольный}$$

$$5) \quad 170^2 > 119^2 + 68^2 \text{ — тр-к тупоугольный.}$$

**426.** 1) Третья сторона тр-ка должна быть меньше суммы  $(5 + 3)$  и больше разности  $(5 - 3)$  двух других сторон. Кроме того, эта сторона, как лежащая против *острого* угла, должна быть меньше  $\sqrt{5^2 + 3^2}$  (зад. 425), т.-е. меньше  $\sqrt{34} = 5, \dots$  Следовательно, данная сторона может быть равна 3, 4, 5.

2) Рассуждаем как в п. 1. Искомая сторона меньше  $5 + 3 = 8$  м, больше  $5 - 3 = 2$  м и больше  $\sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} = 5, \dots$  Т.-е. искомая сторона равна 6 или 7.

3) Пусть стороны выражаются:  $(x - 1)$ ,  $x$ ,  $(x + 1)$ . Тогда (зад. 425)  $(x + 1)^2 > x^2 + (x - 1)^2$ . Упростив неравенство, получим:  $4x - x^2 > 0$  или  $x(4 - x) > 0$ . Но  $x$  — целое, положительное число. Следовательно  $x > 0$  и  $4 - x > 0$ . Второе неравенство можно переписать так:  $x < 4$ . Но так как сумма двух сторон должна быть больше третьей стороны, то  $x + (x - 1) > x + 1$  или  $x > 2$ .



Сопоставив неравенства  $x > 0$ ,  $x > 2$ ,  $x < 4$ , выводим, что  $x = 3$ , при условии, что  $x$  целое число. Искомые стороны 2, 3, 4.

**427.** 1) По формуле для стороны, лежащей против острого угла:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bq$ ; откуда  $q = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$ ;  $p = b - q$ ;  $h = \sqrt{c^2 - q^2}$ .

2) По формуле для стороны, лежащей против тупого угла:  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bq$ , откуда  $q = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2b}$ ;  $p = b + q$ ;  $h = \sqrt{c^2 - q^2}$ .

Подстановкой числовых значений в приведенные формулы получим искомые величины. Предварительно, как в зад. 425, определяется вид тр-ка.

1)  $13^2 < 14^2 + 15^2$  — угол против  $a$  острый.

$$q = \frac{14^2 + 15^2 - 13^2}{2 \cdot 14} = 9, \quad p = 14 - 9 = 5.$$

$$h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12.$$

2)  $37^2 > 30^2 + 13^2$  — угол против  $a$  тупой.

$$q = \frac{37^2 - 30^2 - 13^2}{2 \cdot 30} = 5; \quad p = 30 + 5 = 35,$$

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

3)  $25^2 > 17^2 + 12^2$  — угол против  $a$  тупой.

$$q = \frac{25^2 - 17^2 - 12^2}{2 \cdot 12} = 8; \quad p = 12 + 8 = 20.$$

$$h = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15.$$

4)  $2^2 < 4^2 + 3^2$  — угол против  $a$  острый.

$$q = \frac{4^2 + 3^2 - 2^2}{2 \cdot 4} = 2\frac{5}{8}; \quad p = 4 - 2\frac{5}{8} = 1\frac{3}{8}.$$

$$h = \sqrt{3^2 - (2\frac{5}{8})^2} = \frac{3}{8}\sqrt{15}.$$

**428.** 1) Определим вид тр-ка. Если бы вершина  $B$  лежала на окружности, то тр-к был бы прямоугольным (ибо  $AC$  — диаметр). Но  $8^2 + 10^2$  не равно  $12^2$ , поэтому это предположение отпадает. Если бы вершина  $B$  лежала внутри окружности, то угол  $B$  был бы тупой, так как измерялся бы полусуммой дуг между его сторонами и продолжениями сторон, из которых одна равна полуокружности; но тогда мы должны иметь, что  $AC^2$  больше  $AB^2 + BC^2$ ; но  $12^2 < 8^2 + 10^2$ , следовательно, и это предположение отпадает. Значит, вершина  $B$  лежит вне круга, что подтверждается и тем, что  $12^2 < 8^2 + 10^2$ ; значит, угол  $B$  — острый.

Сторона тр-ка  $AB$  не лежит и вне полукруга. Ибо, если бы  $AB$  имело положение, как указано на чертеже, зад. № 428— $b$  то угол  $BAC$  был бы тупой (смежный ему угол, как вписанный, измеряется полудугой, меньшей полуокружности; т.-е.  $\angle CAD$  — острый), но тогда  $BC^2$  было бы больше суммы  $AB^2 + AC^2$ ; но  $10^2 < 8^2 + 12^2$ . Так же можно вывести, что и  $BC$  не лежит вне полукруга, (черт.  $c$ ) ибо и  $8^2 < 10^2 + 12^2$ .

Чтобы определить отрезки  $AD$  и  $EC$  (черт.  $a$ ), соединим точку  $D$  с  $C$  и  $E$  с  $A$ . Угол  $AEC$  — прямой, как опирающийся на диаметр, т.-е.  $AE \perp BC$ , а потому  $EC$  является проекцией  $AC$  на  $BC$ . Следовательно,  $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot EC$  или

$$8^2 = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot EC, \text{ откуда } EC = \frac{12^2 + 10^2 - 8^2}{2 \cdot 10} = 9 \text{ см.}$$

Таким же путем найдем и  $AD$ .

$$AD = \frac{12^2 + 8^2 - 10^2}{2 \cdot 8} = 6\frac{3}{4} \text{ см.}$$

2) Примечание: вместо „...сторона  $AC$  разделится на две части“; читать: „сторона  $AB$  разделится на две части“.

Рассуждаем, как и в п. 1. Угол  $C$  — тупой, так как  $8^2 > 6^2 + 4^2$ . Следовательно, тр-к ( $AB^2 > BC^2 + AC^2$ ) имеет вид, указанный на чертеже зад. № 428— $c$ . Соединим точки  $C$  и  $D$ . Угол  $ADC$  — прямой, а потому  $CD$  рассматриваем, как высоту на  $AB$ , а  $BD$  — как проекцию  $BC$  на  $AB$ . Имеем

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB \cdot BD, \text{ или } 4^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot BD,$$

$$\text{откуда } BD = \frac{6^2 + 8^2 - 4^2}{2 \cdot 8} = 5\frac{1}{4} \text{ см.}$$

**429.** Пусть угол между данными сторонами  $AC$  и  $BC$  равен  $60^\circ$ . Опустим высоту  $BD$ ; тогда  $DC = \frac{BC}{2}$  (зад. 67). По формуле

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot DC} = \sqrt{BC^2 + AC^2 - AC \cdot BC}.$$

$$1) AB = \sqrt{5^2 + 8^2 - 5 \cdot 8} = 7 \text{ см.}$$

$$2) AB = \sqrt{15^2 + 8^2 - 15 \cdot 8} = 13 \text{ см.}$$

$$3) AB = \sqrt{63^2 + 80^2 - 63 \cdot 80} = 73 \text{ см.}$$

Те же результаты получим, если опустим перпендикуляр  $AE$  на сторону  $BC$  и определим  $AB$ , считая основанием  $BC$ .



**430.** Пусть  $\angle ABC = 120^\circ$ . Стороны  $AB$  и  $BC$  нам даны. Опустим высоту  $CD$  на продолжение стороны  $AB$ ; тогда  $\angle DBC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ . Рассмотрим прямоугольный треугольник  $BCD$ . Катет  $BD = \frac{BC}{2}$  (зад. 67);  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BD} = \sqrt{AB^2 + BC^2 + AB \cdot BC}$ .

$$1) AC = \sqrt{3^2 + 5^2 + 3 \cdot 5} = 7 \text{ см}; \quad 2) AC = \sqrt{7^2 + 8^2 + 7 \cdot 8} = 13 \text{ см};$$

$$AC = \sqrt{11^2 + 24^2 + 11 \cdot 24} = 31 \text{ см}.$$

Те же результаты получим, если продолжим сторону  $BC$  и опустим из точки  $A$  перпендикуляр на продолжение стороны  $BC$ .

**431.** Пусть угол  $BAC$  между данными сторонами  $AB$  и  $AC$  равен  $45^\circ$ . Опустив высоту  $CD$ , получим равнобедренный прямоугольный треугольник  $ACD$  (зад. 62), т. е.  $CD = AD = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{AC \sqrt{2}}{2}$ ,

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AD} = \sqrt{AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC \cdot \sqrt{2}}.$$

$$1) BC = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$$

$$2) BC = \sqrt{8 + 5^2 - 5\sqrt{8}} = \sqrt{13}$$

$$3) BC = \sqrt{18 + 7^2 - 7\sqrt{18}} = 5.$$

Задачу можно решить также, если опустить перпендикуляр из вершины  $B$  на сторону  $AC$ . Результат, конечно, тот же.

**432.** Пусть  $AB = 10$  см, а  $BC = 17$  см.

Обозначим отрезки  $AD$  и  $DC$ , на которые разделилось основание  $AC$ , через  $2x$  и  $5x$ . (Так как меньшая наклонная имеет и меньшую проекцию, то, очевидно,  $AD = 2x$ , а  $DC = 5x$ ). Все основание  $AC$  равно  $AD + DC = 2x + 5x = 7x$ . По формуле  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD$ , или подставив численные значения:  $17^2 = 10^2 + (7x)^2 - 2 \cdot 7x \cdot 2x$ , или  $17^2 - 10^2 = 21x^2$ , откуда  $x = 3$  см. Искомая  $AC = 7x = 21$  см.

**433.** Пусть (черт. зад. № 432)  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$  выражаются последовательными целыми числами  $x$ ,  $x+1$ ,  $x+2$ . Проекция  $DC$  стороны  $BC$  на  $AC$  равна 9.

$$\text{Тогда } AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot DC$$

$$\text{или } x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 - 2(x+1) \cdot 9.$$

По упрощении, получается уравнение:  $x^2 - 12x - 13 = 0$ , откуда  $x = 6 \pm \sqrt{6^2 + 13} = 6 \pm 7$ . Отрицательный корень отпадает. Следовательно,  $x = 13$ . Искомые стороны выразятся числами: 13, 14, 15.

**434.** Пусть  $C$  угол (зад. 429) между сторонами  $BC$  и  $AC$ , которые обозначим через  $8x$  и  $3x$ , равен  $60^\circ$ . Как и в зад. 429:  
 $AB^2 = BC^2 + AC^2 - AC \cdot BC$  или  $21^2 = (8x)^2 + (3x)^2 - 8x \cdot 3x$

Отсюда  $x = 3$  см. Искомые стороны равны:

$$BC = 8x = 24 \text{ см}, AC = 3x = 9 \text{ см}.$$

**435.** Опустив перпендикуляр  $BD$  (черт. зад. № 429) на сторону  $AC$ , находим (зад. 67), что  $DC = \frac{BC^2}{AC} = 8$  м. Решаем, как и зад. 429.

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - AC \cdot BC \text{ или } 14^2 = 16^2 + AC^2 - 16 \cdot AC;$$

$$\text{получаем квадратное ур-ие: } AC^2 - 16AC + 60 = 0,$$

$$\text{откуда } AC = 8 \pm \sqrt{8^2 - 60} = 6 \text{ см или } 10 \text{ см}.$$

**436.** Пусть  $\angle B = 60^\circ$ . Обозначим искомые  $AB$  и  $BC$  через  $x$  и  $y$ . Тогда  $x + y = 22$  см (1). Опустим из вершины  $A$  перпендикуляр на сторону  $BC$ ; тогда  $BD = \frac{AB^2}{BC} = \frac{x^2}{y}$  (зад. № 67).

$$\text{Имеем: } AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB \cdot BC \text{ (зад. 429) или } 13^2 = x^2 + y^2 - xy \text{ (2).}$$

Разрешаем полученную систему 2-х уравнений с 2-мя неизвестными. Для этого ур-ие (1) возводим в квадрат и вычитываем почленно ур-ие (2). Получим  $xy = 105$  см. По сумме и произведению неизвестных составляем квадратное ур-ие (считая  $x$  и  $y$  корнями этого квадратного ур-ия):

$$z^2 - 22z + 105 = 0, \text{ откуда } z = 11 \pm \sqrt{11^2 - 105} = 11 \pm 4.$$

$$\text{Итак } x = 15, y = 7, \text{ или наоборот } x = 7, y = 15.$$

Для определения высоты  $BE$ , рассмотрим прямоугольные тр-ки  $BCE$  и  $ADC$ : они подобны, ибо имеют общий острый угол  $C$ ;  
 $AD = \frac{AB}{BC} \sqrt{3}$  (зад. 67)  $= \frac{15}{2} \sqrt{3}$ . Напишем пропорцию  $\frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC}$

$$\text{или } \frac{BE}{\frac{15}{2} \sqrt{3}} = \frac{7}{13}, \text{ откуда } BE = \frac{105}{26} \sqrt{3}$$

Этот же результат получим, определив проекцию  $AE$  стороны  $AB$ , а затем искомый катет  $BE$  из прямоугольного тр-ка  $ABE$ . Или подобным же образом рассмотрим прямоугольный тр-к  $BEC$  и из него определим  $BE$ .

**437.** Опустим высоту  $BD$  на продолжение основания  $AC$   
 $AD = \frac{AB^2}{AC}$  (зад. 67; угол  $BAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ).

Имеем:  $BC^2 = AC^2 + AB^2 + AC \cdot AB$  (зад. 430) или  $28^2 = 12^2 + AB^2 + 12 \cdot AB$ . Получается квадратное ур-ие:

$$AB^2 + 12AB - 640 = 0, \text{ откуда } AB = -6 \pm \sqrt{6^2 + 640} = -6 \pm 26;$$

принимая положительный корень  $AB = 20$  см.



**438.** Пусть  $BD = BC = a$ . Гипотенуза  $AB = a\sqrt{2}$ . Высота  $CE = AE = EB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ . Искомая  $DC$  определится, как гипотенуза тр-ка  $CED$ , в котором катет  $ED = EB + BD = \frac{a}{2}\sqrt{2} + a$ .  
 $CD = \sqrt{CE^2 + ED^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2} + a\right)^2}$ . Упростив последнее выражение, получим  $ED = a\sqrt{2} + \sqrt{2}$ . Искомая  $AD = AB + BD = a\sqrt{2} + a = a(\sqrt{2} + 1)$ .

Сторону  $CD$  можно еще определить и по формуле, как сторону тр-ка  $BCD$ , лежащую против тупого угла.

**439.** Пусть дана хорда  $AB = a$ . Хорда половинной дуги  $AC$  определится из тр-ка  $AOC$  как сторона, лежащая против острого угла  $AOC$ .

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OC \cdot OD$$

Но  $OA = r$ ,  $OC = r$ , а  $OD$  определится, как катет прямоугольного тр-ка  $OAD$ , в котором  $AD = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ ;

$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ . Следовательно,  $AC^2 = r^2 + r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ . При  $r = 25$ ,  $a = 48$  получим  
 $AC = \sqrt{2 \cdot 25^2 - 25 \cdot 48^2} = 30$ .

**440.** Пусть  $D$  — середина  $AC$ , так что  $AD = DC = \frac{AC}{2}$  или  $AC = 2DC$ ;  $BE$  — высота.

По формуле,  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AE$  или  $BC^2 - AB^2 = AC^2 - 2AC \cdot AE = AC(AC - 2AE) = AC(2DC - 2AE) = AC \cdot 2(AD - AE) = 2AC \cdot ED$ .

**441.** 1) Опустим высоту  $CE$  на гипотенузу.

Искомую прямую  $CD$  определим из прямоугольного тр-ка  $CED$ , в котором катет  $CE$  есть высота на гипотенузу  $AB$ , а катет  $DE$  равен  $AE - AD = AE - 4$  см ( $AE$  — проекция катета  $AC$  на гипотенузу).  $CE$  и  $AE$  определим так (зад. 335).

Гипотенуза  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ см};$

$$AE = \frac{AC^2}{AB} = \frac{15^2}{25} = 9 \text{ см}; \quad BE = AB - AE = 25 - 9 = 16 \text{ см};$$

$$CE = \sqrt{AE \cdot BE} = \sqrt{9 \cdot 16} = 12 \text{ см}.$$

Итак,  $CD = \sqrt{CE^2 + ED^2} = \sqrt{CE^2 + (AE - ED)^2} = \sqrt{12^2 + (9 - 4)^2} = 13 \text{ см}.$

Задачу можно решить и так:  $CD$  рассматриваем, как сторону тр-ка  $ACD$ , по формуле:

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 + 2AD \cdot ED, \text{ откуда и определяется } CD.$$

2) Опустим из вершины  $C$  перпендикуляр на  $AB$ .

Искомую  $CD$  определим из тр-ка  $ACD$  по формуле

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE.$$

$$\begin{aligned} AC &= 24 \text{ см (по условию); } AD = AB + BD = \sqrt{AC^2 + BC^2} + BC = \\ &= \sqrt{24^2 + 7^2} + 7 = 32; \quad AE = \frac{AC^2}{AB} = \frac{24^2}{25} = 23,04 \text{ см}. \end{aligned}$$

$$\text{Следов., } CD = \sqrt{24^2 + 32^2 - 2 \cdot 32 \cdot 23,04} = \sqrt{125,44} = 11,2 \text{ см}.$$

Искомая  $CD$  определится также из тупоугольного тр-ка  $BCD$  по формуле:  $CD^2 = BD^2 + BC^2 + 2BC \cdot BE = 7^2 + 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 1,96 =$

$$= 125,44 \left[ BE = \frac{BC^2}{AB} = \frac{7^2}{25} = 1,96 \text{ см} \right].$$

**442.** По условию,  $BD = AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$

Продолжим катет  $AC$  на длину катета  $BC$ , т.е.  $AL = BC = a$  и соединим точки  $B$  и  $L$ . Тр-ки  $BAL$  и  $BCD$  равны между собой, так как  $AB = BD = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $AL = BC = a$ .

$\angle BAL = \angle DBC$  ( $\angle DBC = \angle DBA + \angle ABC = d + \angle ABC$ ;  
 $\angle BAL = \angle BCA + \angle ABC = d + \angle ABC$ ; рассматриваем  $\angle BAL$  как внешний угол тр-ка  $ABC$ ).

Из равенства тр-ков следует, что  $DC = BL$ .

Из прямоуг-го тр-ка  $CBL$ , у которого катет  $BC = a$ , а катет  $CL = AC + AL = a + b$ , находим, что гипотенуза  $BC = \sqrt{BC^2 + CL^2} = \sqrt{a^2 + (a+b)^2}.$

**443.** Примечание. В тр-ке  $ABC$  принято обозначать стороны, лежащие против углов  $A, B, C$ , соответственными буквами  $a, b, c$ .

Углы  $A$  и  $B$ , как лежащие против меньших сторон,—острые, поэтому рассматриваем сторону  $BC$ , как сторону, лежащую про-



тив острого угла. Опустим высоту  $CE$  на сторону  $AB$ . По формуле (из тр-ка  $ABC$ )  $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AE$  или  $37^2 = 15^2 + 44^2 - 2 \cdot 44 \cdot AE$ , откуда  $AE = \frac{15^2 + 44^2 - 37^2}{2 \cdot 44} = 9$ .

Искомую  $CD$  определим из тр-ка  $ACD$  по формуле:

$$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE} = \sqrt{15^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot 9} = 13.$$

**444.** Расстояния высот  $BD$  и  $AE$  от вершины  $B$  тупого угла есть отрезки  $CD$  и  $CE$ , равные по условию 2 см и 3 см. Прямоуг. тр-ки  $BDC$  и  $ACE$  подобны, так как  $\angle BCD = \angle ACE$ , как вертикальные.

Из подобия этих тр-ков следует:  $\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{CE}$  или  $\frac{BC}{AC} = \frac{2}{3}$ .

Обозначим  $BC$  и  $AC$  через  $2x$  и  $3x$ . По формуле (из тр-ка  $ABC$ ),  $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2AC \cdot DC$  или  $16^2 = (2x)^2 + (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2$ . Получается квадратное ур-ие:  $13x^2 + 12x - 256 = 0$ ,

откуда  $x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 + 4 \cdot 13 \cdot 256}}{2 \cdot 13} = \frac{-12 \pm 116}{26}$ . Принимаем по-

ложительный корень  $x = \frac{-12 + 116}{26} = 4$ ;  $2x = 8$  см,  $3x = 12$  см.

**445.** Углы  $A$  и  $C$  острые, так как  $60^\circ < 50^\circ + 50^\circ$ , следовательно, применим к  $AC$  формулу, как для стороны, лежащей против острого угла:  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BE$ ,

откуда  $BE = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2BC}$  или  $BE = \frac{50^2 + 50^2 - 60^2}{2 \cdot 50} = 14$  см,

следовательно, и  $BD = 14$  см.

Искомая третья сторона  $DE$  определится из подобия тр-ков

$$ABC \text{ и } DBE: \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} \text{ или } \frac{DE}{60} = \frac{14}{50};$$

$$\text{откуда } DE = \frac{60 \cdot 14}{50} = 16,8 \text{ см.}$$

**446.** Опустим высоту  $BE$ . Вследствие параллельности прямых  $DC$  и  $BE$  (обе перпендикулярны к  $AC$ ) имеем:

$$\frac{DC}{BE} = \frac{AC}{AE} \text{ и } \frac{BD}{AB} = \frac{EC}{AE}.$$

Для определения искомых  $DC$  и  $BD$  остается найти  $BE$ ,  $AE$  и  $EC$ . Заметим, что углы тр-ка  $ABC$  острые, так как  $45^\circ < 39^\circ + 42^\circ$ , а потому пользуемся соответственной формулой:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AE, \text{ откуда } AE = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AC}$$

$$\text{или } AE = \frac{45^2 + 42^2 - 39^2}{2 \cdot 42} = 27; EC = AC - AE = 42 - 27 = 15;$$

$$BE = \sqrt{BC^2 - EC^2} = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36. \text{ Следовательно, } \frac{DC}{36} = \frac{42}{27},$$

$$\text{откуда } DC = \frac{36 \cdot 42}{27} = 56, \text{ и } \frac{BD}{45} = \frac{15}{27}, \text{ откуда } BD = \frac{45 \cdot 15}{27} = 25.$$

**447.** Опустим высоту  $BF$  на основание  $AC$ . Прямые  $EC$  и  $BF$  параллельны, как перпендикуляры к одной и той же прямой  $AC$ . Вследствие параллельности  $EC$  и  $BF$  можем написать пропорцию  $\frac{EC}{BF} = \frac{GC}{GF}$ ;  $GC$  определяется из теоремы о биссектрисе:  $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GC}$  или  $\frac{AB}{BC} = \frac{AC - GC}{GC}$ ; подставив в последнее выражение числовые величины, получим:

$$\frac{15}{13} = \frac{14 - GC}{GC}, \text{ откуда } GC = \frac{13}{2}.$$

Отрезок  $FC$  определится из формулы (имеем в виду, что тупого угла в тр-ке нет, так как  $15^2 < 14^2 + 13^2$ ):

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot FC \text{ или } 15^2 = 13^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot FC,$$

$$\text{откуда } FC = 5. \text{ А потому } GF = GC - FC = \frac{13}{2} - 5 = \frac{3}{2}.$$

$BF = \sqrt{BC^2 - FC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ . Из приведенной вначале пропорции определим искомую

$$EC = \frac{BF \cdot GC}{GF} = \frac{12 \cdot \frac{13}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{12 \cdot 13}{3} = 52.$$

**448.** Пусть  $AD = FD$ . Проведем высоту  $BE$  на сторону  $AC$ . Образуются подобные тр-ки  $EBC$  и  $FDC$ . Из подобия этих тр-ков имеем:  $\frac{FD}{BE} = \frac{DC}{EC}$  или  $\frac{FD}{BE} = \frac{AC - AD}{EC}$  или  $\frac{FD}{BE} = \frac{AC - FD}{EC}$  (1).  
Задача свелась к отысканию  $BE$  и  $EC$ .

В тр-ке  $ABC$  нет тупого угла, так как (зад. 425)  $15^2 < 13^2 + 14^2$ , а потому воспользуемся формулой

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot EC.$$

$$\text{или } 13^2 = 15^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot EC, \text{ откуда } EC = \frac{15^2 + 14^2 - 13^2}{2 \cdot 14} = 9.$$

$$BE = \sqrt{BC^2 - EC^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12.$$

Подставив в пропорцию (1) значения  $BE$  и  $EC$ , получим

$$\frac{FD}{12} = \frac{14 - FD}{9}, \text{ откуда } FD = 8.$$



### 3. Параллелограмм и трапеция.

**449.** 1) Обозначим диагонали через  $2x$  и  $3x$ . Так как по теореме сумма квадратов диагоналей пар-ма равна сумме квадратов всех его сторон, то  $(2x)^2 + (3x)^2 = 2(23^2 + 11^2)$ , откуда

$$x = 10 \text{ см}; 2x = 20 \text{ см}, 3x = 30 \text{ см}.$$

2) Пусть стороны параллелограмма  $2x$  и  $3x$ . По теореме (как в п. 1),  $2[(2x)^2 + (3x)^2] = 17^2 + 19^2$ , откуда  $x = 5 \text{ см}; 2x = 10 \text{ см}, 3x = 15 \text{ см}.$

**450.** 1) Пусть одна сторона параллелограмма  $x$ , тогда смежная с ним сторона равна  $(x + 4) \text{ см}.$  По теореме (зад. 449)  $2[x^2 + (4 + x)^2] = 12^2 + 14^2$ . Получается квадратное у-ие:  $x^2 + 4x - 77 = 0$ , откуда  $x = 7 \text{ см}$  (берем положительный корень);  $4 + x = 4 + 7 = 11 \text{ см}.$

2) Обозначим большую сторону параллелограмма и меньшую диагональ его через  $x$ , тогда меньшая сторона параллелограмма равна  $x - 3$ , а большая диагональ  $x + 2$ . По теореме (зад. 449):  $2[x^2 + (x - 3)^2] = x^2 + (x + 2)^2$ .

Получаем квадратное у-ие:  $x^2 - 8x + 7 = 0$ , откуда  $x = 4 + 3$ . Принимаем  $x = 7 \text{ см}$  ( $x = 1$  не удовлетворяет условиям задачи). Следовательно, стороны параллелограмма  $7 \text{ см}$  и  $4 \text{ см}$ , диагонали  $7 \text{ см}$  и  $9 \text{ см}.$

**451.** Высота параллелограмма  $BE$  является и высотой тр-ка  $ABD$ , у которого две стороны  $AB$  и  $AD$  суть стороны параллелограмма, а  $BD$  — меньшая диагональ его.

Определим не данную в задаче сторону параллелограмма  $AB$ ; по теореме (зад. 449):  $2(AB^2 + 51^2) = 40^2 + 74^2$ , откуда  $AB = \sqrt{937}$ .

Искомая высота  $BE$  определится, как катет прямоугольного тр-ка  $EBD$ , для чего определим второй катет  $ED$ .

Отрезок  $ED$  получится из равенства

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2AD \cdot ED \text{ или } 937 = 40^2 + 51^2 - 2 \cdot 40 \cdot ED, \\ \text{откуда } ED = \frac{40^2 + 51^2 - 937}{2 \cdot 40} = 32.$$

$$\text{А потому } BE = \sqrt{BD^2 - ED^2} = \sqrt{40^2 - 32^2} = 24 \text{ см}.$$

**452.** 1) Диагонали в равнобедренной трапеции равны между собой.

В равнобедренной трапеции проекция  $AE$  боковой стороны на нижнее основание равна  $\frac{AD - BC}{2}$ , в данном случае

$$AE = \frac{6 - 4}{2} = 1 \text{ м}.$$

В тр-ке  $ABD$  известны  $AB$ ,  $AD$  и  $AE$ . Зависимость между этими тремя величинами и диагональю  $BD$  такая:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE$  или  $BD^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 1 = 49$ , откуда  $BD = 7$  м.

$$2) AE = \frac{AD - BC}{2} = \frac{5 - 4}{2} = 0,5 \text{ см. Как и в п. 1, диагональ}$$

$$BD = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 0,5} = 6 \text{ см.}$$

**453.** Пусть  $AD = a$ ,  $AB = b$ ,  $BC = c$ ,  $CD = d$ .

Чтобы определить высоту  $BE$ , проведем  $BF$ , параллельную  $CD$ ; тогда образуется тр-к  $ABF$ , у которого стороны

$$AB = b, BF = CD = d, AF = AD - FD = AD - BC = a - c.$$

Высота  $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2}$ . Отрезок  $AE$  определится из равенства  $BF^2 = AB^2 + AF^2 - 2AF \cdot AE$  или  $d^2 = b^2 + (a - c)^2 - 2(a - c) \cdot AE$ , откуда  $AE = \frac{b^2 + (a - c)^2 - d^2}{2(a - c)}$ . Зная  $AE$ , определим  $BE$ ,  $BD$  и  $AC$

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{b^2 - AE^2}$$

$$BD = \sqrt{BE^2 + ED^2} = \sqrt{BE^2 + (AD - AE)^2} = \sqrt{(b^2 - AE^2) + (a - AE)^2}$$

$$AC = \sqrt{CH^2 + AH^2}, \text{ где } CH = BE, AH = AD - HD =$$

$$= a - \sqrt{CD^2 - CH^2} = a - \sqrt{d^2 - BE^2} = a - \sqrt{d^2 - (b^2 - AE^2)}.$$

$$1) AE = \frac{13^2 + (25 - 11)^2 - 15^2}{2(25 - 11)} = 5; BE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12;$$

$$(ED = 25 - 5 = 20); BD = \sqrt{12^2 + 20^2} = \sqrt{544};$$

$$(AH = 25 - \sqrt{15^2 - 12^2} = 25 - 9 = 16), AC = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20.$$

$$2) AE = \frac{25^2 + (28 - 16)^2 - 17^2}{2(28 - 16)} = 20; BE = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15;$$

$$BD = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17; AC = 39.$$

$$3) BE = 2,4; BD = \sqrt{23,4}; AC = \sqrt{13,6}.$$

**454.** Пусть диагонали параллелограмма  $DG$  и  $EF$  параллельны сторонам тр-ка  $BC$  и  $AB$ .

$AF = DE$ ;  $FG = DE$ ;  $GC = DE$  (как параллельные между параллельными). Следовательно,  $AC = AF + FG + GC = 3DE$ , откуда

$$DE = \frac{AC}{3} = \frac{45}{3} = 15 \text{ см. Из подобия тр-ков } ADG \text{ и } ABC \text{ имеем:}$$

$$\frac{DG}{BC} = \frac{AG}{AC} \text{ или } \frac{DG}{48} = \frac{30}{45} \text{ или } DG = \frac{48 \cdot 30}{45} = 32 \text{ см.}$$

$$\text{Из подобия тр-ков } EFC \text{ и } ABC \text{ имеем: } \frac{EF}{AB} = \frac{FC}{AC} \text{ или}$$

$$\frac{EF}{39} = \frac{30}{45}, \text{ откуда } EF = \frac{39 \cdot 30}{45} = 26 \text{ см.}$$



Зная сторону параллелограмма и обе диагонали, определим вторую сторону по теореме (зад. 449). Пусть искомая сторона  $x$ . тогда:  $2(x^2 + 15^2) = 32^2 + 26^2$ , откуда  $x = 25$  см.

**455.** Из тр-ка  $ABD$  имеем:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE; \text{ но } AE = \frac{AD - BC}{2}; \text{ а потому}$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot \frac{(AD - BC)}{2} = AB^2 + AD \cdot BC.$$

**456.** Пусть  $ABCD$  — данная трапеция.

Из тр-ка  $ABD$  имеем:  $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE$  (1).

Из тр-ка  $ACD$  имеем:  $AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2AD \cdot FD$  (2).

Сложив оба равенства почленно, получим:

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD^2 - 2AD(AE + FD) \text{ (3),}$$

но  $AE + FD = AD - EF = AD - BC$ . Подставив последнее выражение в равенство (3) и раскрыв скобки, получим:

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC.$$

**457.** Пусть  $E, F, G, K$  — середины сторон 4-угольника  $ABCD$ . Соединив последовательно эти точки, получим параллелограм:

$FG$  из тр-ка  $BCD$  равна  $\frac{BD}{2}$  и параллельна  $BD$ , а  $EK$  — из тр-ка

$ABD$  — равна  $\frac{BD}{2}$  и параллельна  $BD$ ; подобно этому и  $EF$  равно

и параллельно  $KG$  (для существования параллелограмма достаточно одного первого или второго условия).

Из параллелограмма  $EFGK$  имеем:  $EG^2 + FK^2 = EF^2 + KG^2 +$   
 $+ EK^2 + FG^2$  (1). Так как  $EF = KG = \frac{AC}{2}$ , а  $FG = EK = \frac{BD}{2}$ , то,

подставив в равенство (1) эти величины, получим:

$$EG^2 + FK^2 = \frac{AC^2}{2} + \frac{BD^2}{2} \text{ или } AC^2 + BD^2 = 2(EG^2 + FK^2).$$

#### 4. Вписанный четырехугольник.

**458.** Пусть точка  $D$  окружности соединена с вершинами  $A, B, C$  вписанного равностороннего тр-ка. По теореме Птолемея,

$$AB \cdot DC = AD \cdot BC + BD \cdot AC \text{ или}$$

$$a \cdot DC = AD \cdot a + BD \cdot a.$$

Сократив на  $a$  обе части равенства, получим

$$DC = AD + BD.$$

**459.** Около каждой равнобедренной трапеции можно описать окружность, так как сумма противоположных углов равна  $2d$ .  
 Диагонали равнобедренной трапеции равны между собой. Пусть диагональ трапеции —  $d$ . Опишем около трапеции окружность и применим теорему Птолемея

$$1) d^2 = 3.5 + 7.7 \text{ или } d^2 = 64, \text{ откуда } d = 8 \text{ см.}$$

$$2) d^2 = 25.11 + 25.25 \text{ или } d^2 = 900, \text{ откуда } d = 30 \text{ см.}$$

**460.** Пусть  $BO = OC = 27$  см, а  $OD = OA = 48$  см. Тр-ки  $BOC$  и  $AOD$  подобны ( $\angle OBC = \angle ODA$  и  $\angle BCA = \angle OAD$ , как накрест-лежащие), а потому напишем пропорцию.

$$\frac{AD}{BC} = \frac{OD}{OB} = \frac{48}{27} \text{ или } \frac{AD}{BC} = \frac{16}{9}.$$

Пусть  $AD = 16x$ ,  $BC = 9x$ . Тогда (зад. 45) —принимая во внимание, что диагональ равна  $27 + 48 = 75$  см—имеем:  
 $75.75 = 16x.9x + 45.45$  или  $75^2 - 45^2 = 16.9.x^2$ , откуда  $x = 5$ ;  
 $AD = 16x = 80$  см,  $BC = 9x = 45$  см.

**461.** Касательные  $AB$  и  $AC$  равны (зад. 158). Соединив центр окружности  $O$  с точками касания  $B$  и  $C$ , получим 4-угольник  $OBAC$ , в котором углы  $OBA$  и  $OCA$  прямые, следовательно, и  $\angle BAC + \angle BOC = 2d$  (так как сумма углов в 4-угольнике равна  $4d$ ). А потому около этого 4-угольника можно описать окружность и к нему применяется теорема Птолемея.

Касательная  $AB$  определится из прямоугольного тр-ка  $OAB$ :

$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{125^2 - 44^2} = 117 \text{ см.}$$

Итак, по теореме Птолемея:

$$BC.125 = 117.44 + 117.44, \text{ откуда } BC = \frac{2.117.44}{125} = 82,392 \text{ см.}$$

**462.** Около данного 4-угольника (см. зад. 461) можно описать окружность.  $BC$  определится из прямоугольного тр-ка  $ABC$ , а  $DC$ — из прямоугольного тр-ка  $ADC$ ;  $BC = \sqrt{85^2 - 84^2} = 13$  см;  
 $DC = \sqrt{85^2 - 75^2} = 40$  см.

По теореме Птолемея

$$BD.AC = AB.DC + AD.BC \text{ или}$$

$$BD.85 = 84.40 + 75.13, \text{ откуда } BD = \frac{84.40 + 75.13}{85} = 51 \text{ см.}$$



**463.** Если мы на  $AD$ , как на диаметре, опишем окружность, то она пройдет через точки  $B$  и  $C$ , так как углы  $ABD$  и  $ACD$  — прямые (если бы точки очутились внутри окружности, то  $\angle ABD$  и  $\angle ACD$  были бы тупые углы, если бы точки лежали вне окружности, то углы были бы острыми). Следовательно, к данному 4-угольнику применима теорема Птолемея.

Диагонали  $BD$  и  $AC$  определяются, как катеты, из прямоугольных тр-ков  $ABD$  и  $ACD$ .  $BD = \sqrt{65^2 - 33^2} = 56$  см,

$AC = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60$  см. По теореме Птолемея

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD \text{ или } 60 \cdot 56 = 33 \cdot 25 + BC \cdot 65,$$

$$\text{откуда } BC = \frac{60 \cdot 56 - 33 \cdot 25}{65} = 39 \text{ см.}$$

**464.** 1-й случай. Хорды  $AB$  и  $AC$  лежат по разные стороны центра.

Проведя диаметр  $AD$  и соединив точки  $B$  и  $C$  с точкою  $D$ , получаем 4-угольник  $ABDC$ , в котором  $BC$  служит диагональю. Хорды  $BD$  и  $DC$  определяются из прямоугольных тр-ков  $ABD$  и  $ACD$ ;  $AD = 2 \cdot 25 = 50$  см.

$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{50^2 - 14^2} = 48 \text{ см.}$$

$$DC = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30 \text{ см.}$$

По теореме Птолемея

$BC \cdot AD = AB \cdot CD + AC \cdot BD$  или  $BC \cdot 50 = 14 \cdot 30 + 40 \cdot 48$ , откуда

$$BC = \frac{14 \cdot 30 + 40 \cdot 48}{50} = 46,8 \text{ см.}$$

2-й случай.  $AC$  имеет положение  $AC_1$ , т.е. хорды лежат по одну сторону центра. Рассуждаем по-предыдущему. Соединяем точку  $B$  и  $C_1$  с точкой  $D$  и находим  $BD$  и  $DC_1$

$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{50^2 - 14^2} = 48 \text{ см.}$$

$$DC_1 = \sqrt{AD^2 - AC_1^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30 \text{ см.}$$

По теореме Птолемея

$$BD \cdot AC_1 = AB \cdot C_1D + BC_1 \cdot AD \text{ или}$$

$$48 \cdot 40 = 14 \cdot 30 + BC_1 \cdot 50, \text{ откуда}$$

$$BC_1 = \frac{48 \cdot 40 - 14 \cdot 30}{50} = 30 \text{ см.}$$

**465.** Соединим  $B$  и  $C$  с точкой  $D$  и между собою. Получится 4-угольник  $ACBD$ , из которого по теореме Птолемея определяем искомую  $AD$ . Для этого определим раньше  $BC$  и  $BD$  из прямоугольных тр-ков  $ABC$  и  $ABD$ .

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{8^2 - 1^2} = \sqrt{63}; \quad BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{64 - AD^2}$$

Сторона  $CD$  равна  $BD$ , как хорды, стягивающие равные дуги, ибо  $\angle BAD = \angle CAD$ .

Итак,  $AD \cdot BC = AB \cdot CD + AC \cdot BD$  или

$$AD \sqrt{63} = 8 \sqrt{64 - AD^2} + 1 \cdot \sqrt{64 - AD^2}, \text{ откуда}$$

$$AD = \frac{3 \sqrt{64 - AD^2}}{\sqrt{7}}.$$

Возведя обе части равенства в квадрат и решив уравнение, получим  $AD = 6$  см.

**466.** Проведем радиус  $OC$  в точку касания  $C$  и соединим точки  $C$  и  $B$  между собой. Получится 4-угольник  $OABC$ . Проведем диагональ  $OB$ .

Углы  $ACO$  и  $ABO$  прямые, как образованные радиусами и касательными. Поэтому (зад. 463) около полученного 4-угольника можно описать окружность, и применима теорема Птолемея.

Если опишем окружность около 4-угольника  $ABCO$ , то, как в зад. 465, найдем, что  $BC = OC$  (ибо  $BC$  и  $OC$  будут хордами, стягивающими равные дуги). Итак, имеем:

$$OB \cdot AC = OA \cdot BC + AB \cdot OC.$$

Пусть искомый радиус —  $r$ .  $OB$  — радиус большего круга — равен 24 см,  $AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{25^2 - r^2}$ ,  $BC = OC = r$ ,  $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$  см.

$$\text{Следовательно, } 24 \sqrt{25^2 - r^2} = 25 \cdot r + 7 \cdot r \text{ или } 24 \sqrt{25^2 - r^2} = 32r.$$

Сократив обе части на 8 и возведя затем в квадрат, определим  $r = 15$  см.

**467.** Около данного 4-угольника можно описать окружность (сумма углов  $ABC$  и  $ADC = 2d$ ). Опустим перпендикуляр  $AK$  на продолжение стороны  $BC$ ;  $BK = \frac{AB}{2}$  (зад. 67) =  $\frac{3}{2}$  см;  $BC$  определится из равенства  $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BK$  или  $7^2 = 3^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot \frac{3}{2}$ ; получается квадратное уравнение:

$$BC^2 + 3BC - 40 = 0, \text{ откуда } BC = 5 \text{ см.}$$



Чтобы определить длину  $CD$ , опустим перпендикуляр  $AL$ . Отрезок  $DL = \frac{3}{2}$  (зад. 67). Напишем равенство  $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \cdot DL$  или  $7^2 = 3^2 + DC^2 - 2DC \cdot \frac{3}{2}$ . Получилось квадратное ур-ие:  $DC^2 - 3DC - 40 = 0$ , откуда  $DC = 8$  см.

По теореме Птолемея,  $BD \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot BC$  или  $BD \cdot 7 = 3 \cdot 8 + 3 \cdot 5$ , откуда  $BD = \frac{3 \cdot 8 + 3 \cdot 5}{7} = 5,57$  см.

**468.** Если опишем окружность вокруг тр-ка  $ACD$ , то эта окружность пройдет и через вершину  $B$ . В самом деле, точка  $B$  не может лежать вне окружности, ибо тогда угол  $ABC$  был бы меньше  $120^\circ$ ; точка  $B$  не может лежать внутри окружности, ибо тогда  $\angle ABC$  был бы больше  $120^\circ$ .

Опустим перпендикуляр  $DK$  на продолжение диагонали  $AC$ .  $CK = \frac{21}{2}$  (зад. 67). Имеем равенство:

$$AD^2 = CD^2 + AC^2 + 2AC \cdot CK \text{ или}$$

$$49^2 = 21^2 + AC^2 + 2AC \cdot \frac{21}{2}.$$

Получилось квадратное ур-ие:  $AC^2 + 21AC - 1960 = 0$ :

отсюда  $AC = 35$  см.

Опустив перпендикуляр  $AL$  на продолжение  $BD$ , получим  $BL = \frac{AB}{2} - \frac{16}{2} = 8$  см. Из равенства  $AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2BD \cdot BL$  так же, как и раньше, определим  $BD = 39$  см.

По теореме Птолемея, имеем:

$$BC \cdot AD + AB \cdot CD = AC \cdot BD \text{ или}$$

$$BC \cdot 49 + 16 \cdot 21 = 35 \cdot 39, \text{ откуда}$$

$$BC = \frac{35 \cdot 39 - 16 \cdot 21}{49} = 21 \text{ см.}$$

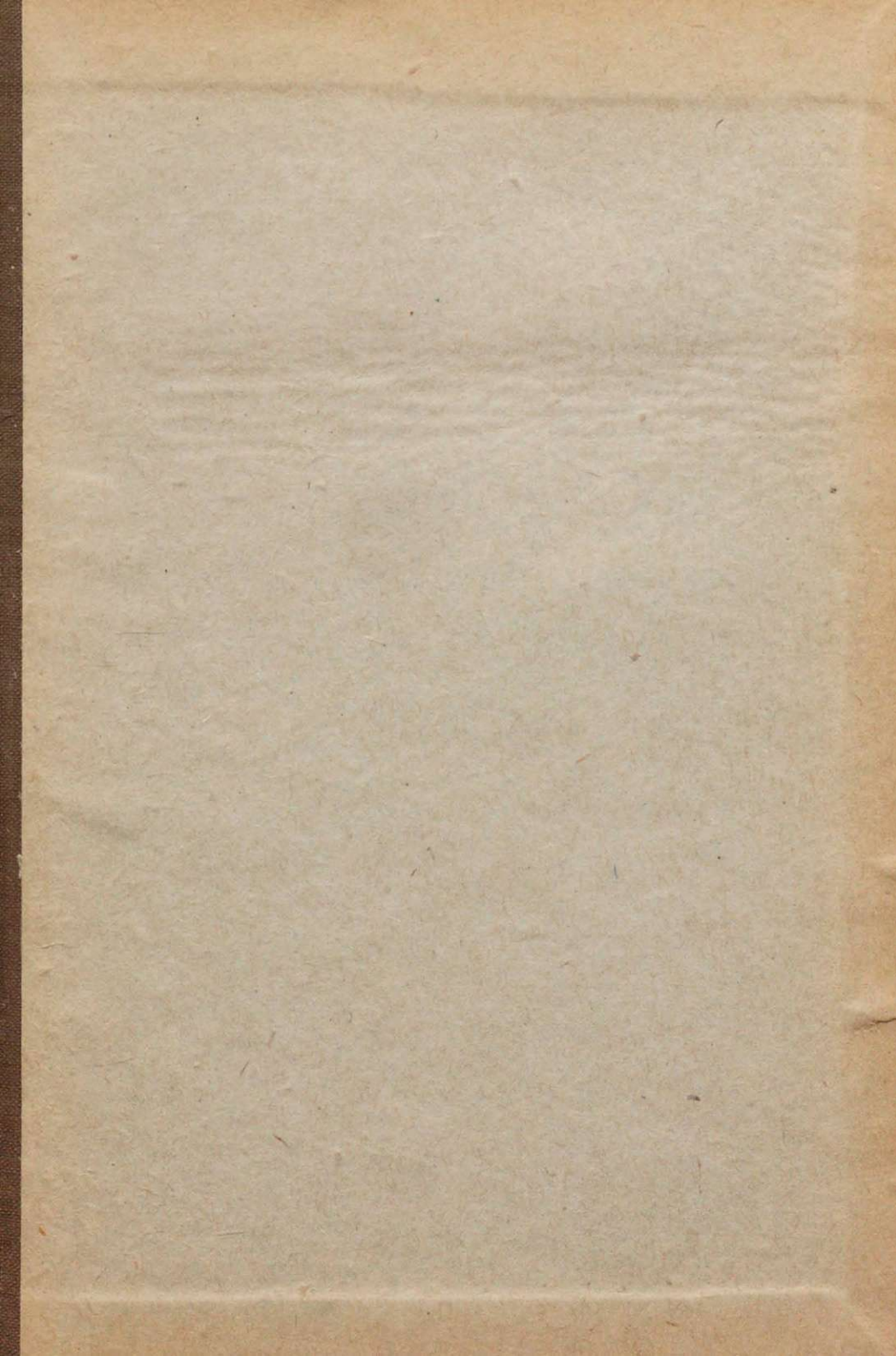
















2011110203